LE COURS PARTICULIER

PHYSIQUE 2

Terminales CE

125 PROBLEMES CORRIGES

DELAGRAVE

LE COURS PARTICULIER

OSCILLATIONS PHYSIQUE ATOMIQUE

TERMINALE CE

2

UNE VÉRITABLE SYNTHÈSE DU COURS ET DES EXERCICES EN 45 FLASHES A MÉMORISER ET 126 PROBLÈMES CORRIGÉS.
UNE PROGRESSION D'UNE TRÈS GRANDE EFFICACITÉ QUEL QUE SOIT LE NIVEAU INITIAL DE L'ÉLÈVE

DELAGRAVE
15, rue Soufflot, 75240 PARIS Cédex 05

La loi du 11 mars 1957 n autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées a l usage privé du copiste et non destinées a une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l article 40).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code Pénal.

© DELAGRAVE 1984

ISBN 2-206-00246-9

NOTE AU LECTEUR

• *Les deux tomes MÉCANIQUE-ÉLECTROMAGNÉTISME et OSCILLATIONS-PHYSIQUE ATOMIQUE couvrent tout le programme de physique Terminale CE de 1983*.*

• *La progression proposée part d'un niveau très bas, c'est-à-dire que les connaissances utiles des classes précédentes sont rappelées, exercices à l'appui.*

• *Une longue expérience nous a appris :*

— que la meilleure façon d'être simple et clair est de satisfaire votre logique, c'est-à-dire d'être rigoureux et méthodique, d'obéir à des lois bien précises et non pas de vagabonder à l'inspiration ;

— que la façon la plus efficace de présenter les connaissances est d'opérer par touches successives au fur et à mesure des besoins et non pas de faire un exposé préliminaire souvent indigeste et mal compris.

• *Guidé par une progression qui ne laisse rien dans l'ombre, qui essaie de répondre à toutes les questions que vous pourriez poser à un tuteur, vous améliorerez votre méthode de travail et vous atteindrez un bon niveau, largement suffisant pour passer les épreuves du baccalauréat.*

Il suffit que vous le vouliez et pour cela il faut jouer honnêtement le jeu : apprendre les parties à mémoriser, notées ℳ, sélectionnées en tenant compte des commentaires officiels ; s'imposer une durée de recherche suffisante ; ne pas sauter des maillons de la progression ; refaire les exercices qu'on n'a pas su résoudre seul.

Le simple fait que vous recherchiez un livre « d'exercices corrigés » signifie que vous avez la volonté de progresser, ce livre conçu avec soins vous en donne les moyens.

BOURDON Robert
professeur agrégé

* *Pour faciliter les rappels, les parties à mémoriser du tome II sont numérotées à la suite de celles du tome I, la première est donc ℳ63.*

Quels exercices réviser pour le bac ?

• Insistons d'abord sur le fait qu'il faut d'abord bien comprendre tout le contenu du programme, et pour cela il est nécessaire de faire tout au long de l'année de nombreux exercices parfois assez voisins de façon à ce que l'effet répétitif porte ses fruits : LE COURS PARTICULIER a été construit dans cette optique.

• Le programme assimilé, il faut se lancer dans la « révision du bac ». Parmi les nombreux exercices couvrant la partie OSCILLATIONS-PHYSIQUE ATOMIQUE nous avons retenu le choix suivant, il est bien entendu :
— d'une part qu'il est nécessaire de réviser toutes les parties $\mathcal{M}$ qui forment un noyau irréductible représentant le minimum de connaissances nécessaires;
— d'autre part que c'est à vous de juger si un effort de révisions supplémentaires s'impose sur une partie qui vous « embête » encore.

	Chapitre	Page	Des exercices type
1	Oscillations mécaniques libres	7	5; 6; 7; 12; 13; 17; 18; 19.
2	Oscillations électriques libres	51	25; 28; 29.
3	Oscillations électriques forcées	65	33; 35; 36; 39; 42; 45; 47.
4	Oscillations mécaniques forcées	109	52; 53.
5	Ondes sinusoidales progressives ou stationnaires	119	55; 58; 60; 62; 64; 66.
6	Les particules de grande énergie	153	68; 69; 74; 75; 76.
7	Le photon	181	81; 82; 84; 88; 89; 90.
8	Les niveaux d'énergie dans un atome	207	92; 95; 97.
9	Les réactions nucléaires	221	101; 104; 108; 109; 110; 113; 118; 121.
10	Association onde-particule	251	123; 125.

1 OSCILLATEURS MÉCANIQUES LIBRES

E 1. *Un mobile ponctuel* M *se déplace sur un axe* x'x *d'origine* O. *Il est repéré sur cet axe par* $\overline{OM} = x$.

La loi horaire de son mouvement est $x = 2 \cdot 10^{-2} \cos\left(40\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$ (x *en* m, t *en* s, *angle en* rad).

a) *Préciser l'amplitude, la pulsation, la période, la fréquence, la phase initiale du mouvement.*

b) *Quelle est la longueur du segment décrit par* M?

c) *Quelle est la vitesse de* M *à la date* t?
En déduire :
— *la vitesse maximale de* M;
— *la vitesse de* M *à la date* t = 1 s.

d) *Déterminer l'équation différentielle du mouvement.*
En déduire l'accélération algébrique de M *lorsque le mobile passe par le point d'abscisse* $x = -10^{-2}$ m.

63 Le mouvement rectiligne sinusoïdal.

• Un point M est en mouvement rectiligne sinusoïdal sur un axe Ox. Il oscille autour de O, *centre du mouvement choisi comme origine de l'axe des* x.
Sa loi horaire est une fonction sinusoïdale du temps. En terminale, la loi horaire est écrite sous les formes :

$$x = X_m \cos(\omega t + \varphi) \quad 1$$
$$x = X_m \cos(\omega t - \varphi) \quad 2$$
$$x = X_m \sin(\omega t + \varphi) \quad 3$$
$$x = X_m \sin(\omega t - \varphi) \quad 4$$

X_m : amplitude, > 0, m
ω : pulsation, > 0, $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$
$\omega t \pm \varphi$: phase initiale, rad
$\omega t \pm \varphi$: phase en rad

• Le mouvement se reproduit identique à lui-même tous les temps T, appelé période du mouvement :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

L'inverse de T est la fréquence $N = \frac{1}{T}$ (exprimée en hertz Hz).

• Comme le mouvement est rectiligne (revoir ℳ 6), la vitesse algébrique $\bar{v} = \dot{x}$ et l'accélération algébrique $\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \ddot{x}$.

• Par suite, en prenant la première forme de la loi horaire,

$$\bar{v} = \dot{x} = -X_m \omega \sin(\omega t + \varphi) \qquad \text{(revoir ℳ 57)};$$
$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \ddot{x} = -X_m \omega^2 \cos(\omega t + \varphi).$$

D'où $\boldsymbol{\bar{a} = -\omega^2 x}$.

Cette dernière relation s'écrit $\boldsymbol{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}$, c'est *l'équation différentielle* du mouvement.

S 1. *a*) La loi horaire $x = 2 \cdot 10^{-2} \cos\left(40\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$ est de la forme :

$$x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

avec $X_m = 2 \cdot 10^{-2}$ m, amplitude du mouvement,
avec $\omega = 40\pi$ rad·s^{-1}, pulsation du mouvement,
avec $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ rad, phase initiale du mouvement.

La période $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{40\pi} = 5 \cdot 10^{-2}$ s, la fréquence $N = \frac{\omega}{2\pi} = 20$ Hz.

Remarque. La loi horaire étant exprimée à l'aide d'un cosinus nous avons ramené à la forme 1 de ℳ 63, nous aurions pu ramener à la forme 2, les résultats (amplitude, pulsation, période, fréquence, phase initiale) seraient identiques.

b) Lorsque t varie, la phase $\left(40\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$ varie, le cosinus varie entre -1 et $+1$, donc x varie entre $-2 \cdot 10^{-2}$ m et $+2 \cdot 10^{-2}$ m. Le point M décrit donc un segment de longueur $4 \cdot 10^{-2}$ m $= 4$ cm, de centre O, appelé pour cette raison le centre du mouvement.

Remarque. Ne pas confondre la trajectoire qui est un segment de droite avec la courbe représentant les variations de x en fonction du temps qui est une sinusoïde.

c) • Le mouvement étant rectiligne, la vitesse algébrique $\bar{v} = \dot{x}$.

Par suite $\bar{v} = -2 \cdot 10^{-2} \times 40\pi \sin\left(40\pi t - \frac{\pi}{6}\right) = -2{,}51 \sin\left(40\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$.

• La vitesse est maximale à des dates telles que $\sin\left(40\pi t - \frac{\pi}{6}\right) = \pm 1$, alors $\bar{v} = \overline{v_{maxi}} = 2{,}51$ m·s^{-1}.

• A la date $t = 1$ s,

$$\bar{v} = \bar{v}_1 = -2{,}51 \sin\left(40\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -2{,}51 \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2{,}51 \cdot \sin\frac{\pi}{6} = 1{,}255 \text{ m·s}^{-1}.$$

d) • L'accélération algébrique $\bar{a} = \ddot{x} = \dot{\bar{v}} = -\omega^2 x$, le mouvement a donc pour équation différentielle $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ soit $\ddot{x} + 1{,}579 \cdot 10^4 x = 0$.

• Pour $x = -10^{-2}$ m, $\bar{a} = -1{,}579 \cdot 10^4 \times (-10^{-2}) \simeq 1{,}58 \cdot 10^2$ m·s^{-2}.

E 2. *Un point matériel* M *est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal. La durée de 10 oscillations est* $\mathcal{C} = 8$ s.

a) *Quelle est la fréquence du mouvement?*

b) *Soit* O *le milieu du segment décrit par* M, *comment appelle-t-on* O?
On repère le mobile, sur la trajectoire orientée, par $\overline{OM} = x$; *quelle est la loi horaire du mouvement sachant qu'à la date* $t = 0$, *le mobile passe par* O *dans le sens positif à la vitesse* $0{,}25\ m \cdot s^{-1}$?

c) *Décrire le mouvement de* M *pendant une période en précisant les propriétés du vecteur accélération.*

S 2. *a*) La durée d'une oscillation est la période T du mouvement. Par suite $\mathcal{C} = 10\ T$ et $T = \dfrac{\mathcal{C}}{10} = 0{,}8$ s.

La fréquence du mouvement $N = \dfrac{1}{T} = 1{,}25$ Hz.

b) • Le point O est le milieu du segment décrit par le point M, c'est le centre du mouvement.

• Comme O est en même temps le centre du mouvement et l'origine de l'axe des x, la loi horaire est du type $x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$. (On peut choisir les autres formes 2, 3 ou 4 de $\mathcal{M}$ 63 : les résultats obtenus seront trigonométriquement équivalents.)
Nous connaissons déjà la pulsation $\omega = 2\pi N = 2{,}5\ \pi\ rad \cdot s^{-1}$, pour évaluer X_m et φ nous allons exploiter l'état de mouvement initial.
— D'après les expressions $x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ et $\overline{v} = -X_m \omega \sin(\omega t + \varphi)$, à la date $t = 0$:

$$\begin{cases} x_0 = X_m \cos \varphi \\ \overline{v_0} = -X_m \omega \sin \varphi. \end{cases}$$

— D'après les données de l'énoncé, l'état de mouvement initial est tel que :

$\begin{cases} x_0 = 0 \text{ puisque M passe par O;} \\ \overline{v_0} = +0{,}25\ m \cdot s^{-1} \text{ puisque M est lancé dans le sens } +. \end{cases}$

— En comparant, on en déduit :

$$\begin{cases} X_m \cos \varphi = 0 & (1) \\ -X_m \omega \sin \varphi = 0{,}25. & (2) \end{cases}$$

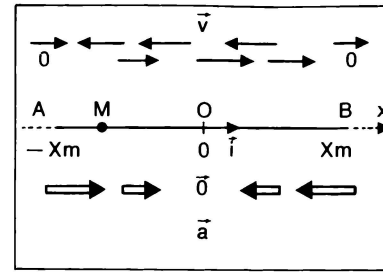
— Nous recherchons un couple de valeurs ($X_m > 0$ et φ) qui convienne. D'après (1), $\cos \varphi = 0$, on peut prendre $\varphi = +\dfrac{\pi}{2}$ rad ou $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$ rad.

En reportant $\varphi = +\dfrac{\pi}{2}$ dans (2), en remarquant que $\sin \dfrac{\pi}{2} = +1$, on trouve une valeur de X_m négative. En reportant $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$ dans (2), en remarquant que $\sin -\dfrac{\pi}{2} = -1$, on trouve $X_m = \dfrac{0{,}25}{\omega} = 3{,}18 \cdot 10^{-2}$ m.

Le couple $X_m = 3{,}18 \cdot 10^{-2}$ m et $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ convient donc, d'où la loi horaire

$x = 3{,}18 \cdot 10^{-2} \cos\left(2{,}5\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$ en unités S.I.

c) • Avant de décrire le mouvement, précisons d'abord les caractéristiques de la vitesse et de l'accélération.



• La vitesse $\bar{v} = -X_m \omega \sin(\omega t + \varphi)$.

— Lorsque $x = 0$, $\cos(\omega t + \varphi) = 0$, par suite $|\sin(\omega t + \varphi)| = 1$ et $|\bar{v}| = X_m \omega$ est maximum.

(Si vous n'êtes pas convaincu : puisque $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, lorsque $\cos x = 0$, $|\sin x = 1|$).

— Inversement lorsque $|x|$ est maximal, $|\cos(\omega t + \varphi)| = 1$, par suite $\sin(\omega t + \varphi) = 0$ et $\bar{v} = 0$.

• L'accélération algébrique $\bar{a} = -\omega^2 x$.

Multiplions par le vecteur unitaire $\vec{i}$ de l'axe des x :

$$\bar{a}\vec{i} = -\omega^2 x \vec{i}.$$

Comme $\vec{a} = \bar{a}\vec{i}$ et comme $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$, il s'ensuit que :

$$\vec{a} = -\omega^2 \overrightarrow{OM} = \omega^2 \overrightarrow{MO}.$$

Le vecteur $\vec{a}$ a donc toujours le sens de $\overrightarrow{MO}$, il pointe toujours vers O : il est centripète.

Le vecteur $\vec{a}$ a un module qui augmente linéairement avec celui de $\overrightarrow{MO}$: ce module est maximum aux extrémités A et B du segment.

• Suivons maintenant le mobile partant de A dans le sens + :

— de A à O, $\vec{v}$ et $\vec{a}$ sont de même sens ($\bar{v}\bar{a} > 0$) : le mouvement est accéléré, le mobile M partant de A à vitesse nulle arrive en O à vitesse maximale;

— de O à B, le mouvement est retardé ($\bar{v}\bar{a} < 0$), M arrive en B à vitesse nulle;

— ainsi de suite...

E 3. *Un point matériel* M *est repéré sur un axe* Ox, *par l'abscisse* $x = \overline{OM}$ *telle que* $\ddot{x} + 1444x = 0$, *en unités S.I.*

A la date $t = 0$, *le mobile est au point* M_0 *d'abscisse* $x_0 = +1$ cm *et a pour vitesse* $\bar{v}_0 = -0{,}5$ m·s^{-1}.

Quelle est la loi horaire du mouvement?

64 Équation différentielle d'un phénomène vibratoire sinusoïdal ou harmonique.

• Soit un phénomène vibratoire caractérisé par une grandeur algébrique x :

— pour un oscillateur mécanique en translation, x représente l'élongation linéaire, c'est-à-dire l'abscisse mesurée à partir de la position de repos qui sera le centre du mouvement de l'oscillateur excité;

— pour un oscillateur mécanique en rotation, x représente l'élongation angulaire, c'est-à-dire l'abscisse angulaire mesurée à partir de la position de repos qui sera le centre du mouvement de l'oscillateur excité;
— pour un oscillateur électrique, x représente souvent la charge algébrique du condensateur.

• Si l'équation différentielle du phénomène vibratoire est de la forme :

$$\ddot{x} + Kx = 0 \quad \text{avec} \quad K > 0$$

c'est un phénomène vibratoire harmonique de pulsation :

$$\omega = \sqrt{K}$$

et de loi horaire :

$$x = A \cos(\sqrt{K}\, t + \varphi)$$

(ou d'une forme équivalente).

• Par dérivation on peut montrer que la solution proposée vérifie bien l'équation différentielle, nous admettons finalement la réciproque.

S 3. *a*) L'équation différentielle du mouvement $\ddot{x} + 1444x = 0$ est de la forme $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, avec $\omega^2 = 1444$, le mouvement est donc oscillatoire harmonique (ou sinusoïdal) de loi horaire :

$$x = X_m \cos(\sqrt{1444}\, t + \varphi) = X_m \cos(38t + \varphi) \text{ en unités S.I.}$$

• Pour déterminer X_m et φ exploitons l'état de mouvement initial.
— D'après les expressions de $x = X_m \cos(38t + \varphi)$ et $\bar{v} = -38 X_m \sin(38t + \varphi)$, à la date $t = 0$:

$$\left| \begin{array}{l} x_0 = X_m \cos \varphi \\ \overline{v_0} = -38 X_m \sin \varphi. \end{array} \right.$$

— D'après les données de l'énoncé, l'état de mouvement initial est tel que :

$$\left| \begin{array}{l} x_0 = +10^{-2} \text{ m} \\ \overline{v_0} = -0{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \end{array} \right.$$

— En comparant, on en déduit :

$$\begin{cases} X_m \cos \varphi = +10^{-2} & (1) \\ -38 X_m \sin \varphi = -0{,}5. & (2) \end{cases}$$

— Nous recherchons un couple de valeurs ($X_m > 0$ et φ) qui convienne.

Faisons le rapport $\dfrac{(2)}{(1)}$: $38 \operatorname{tg} \varphi = \dfrac{0{,}5}{10^{-2}}$, d'où $\operatorname{tg} \varphi = 1{,}316$.

On peut prendre $\varphi = 0{,}921$ rad.

Reportons dans (1) : $X_m = \dfrac{10^{-2}}{\cos(0{,}921 \text{ rad})} = 1{,}65 \cdot 10^{-2}$ m.

• La loi horaire du mouvement est donc $x = 1{,}65 \cdot 10^{-2} \cos(38t + 0{,}921)$ en u. S.I.

E 4. *Un point* M *décrit un segment de droite* AB *d'un mouvement rectiligne sinusoïdal. La longueur de* AB *est* 4 cm. *A la date* t = 0 *le mobile part de* A *(à vitesse nulle), il repasse pour la première fois en* A *au bout de* 0,5 s.

a) *A quelle vitesse repasse-t-il en* A?

b) *Quelle est la pulsation du mouvement sinusoïdal?*

c) *Quelle est l'amplitude du mouvement?*

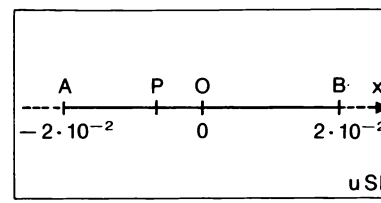
d) *Quelle est la loi horaire du mouvement?*

e) *Au bout de combien de temps, après* t = 0, *le mobile passe-t-il pour la troisième fois au point* P *situé sur* AB, *à* 1,1 cm *de* A?

S 4. *a*) Comme A est l'une des extrémités du segment décrit par le point en mouvement rectiligne sinusoïdal, la vitesse de passage en A est nulle.

b) Pour faire un aller et retour A − B − A, le mobile met le temps T, période du mouvement. Donc T = 0,5 s, par suite la pulsation du mouvement est $\omega = \frac{2\pi}{T} = 4\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

c) Le mobile oscille autour du milieu O de AB, l'amplitude du mouvement est $X_m = OA = \frac{AB}{2} = 2 \text{ cm}$.



d) • Prenons le centre du mouvement comme origine de l'axe des x (on appelle parfois x l'élongation linéaire pour bien insister sur le fait que x est mesuré à partir du centre du mouvement). Orientons l'axe de A vers B.
A la date t = 0, le mobile est en A à vitesse nulle : $x_0 = -2 \cdot 10^{-2}$ m et $\overline{v_0} = 0$.

• La loi horaire est de la forme $x = X_m \cos(\omega t + \varphi) = 2 \cdot 10^{-2} \cos(4\pi t + \varphi)$.
A la date t = 0, d'après l'expression précédente $x_0 = 2 \cdot 10^{-2} \cos \varphi$, d'après l'état de mouvement initial $x_0 = -2 \cdot 10^{-2}$ m.

D'où $-2 \cdot 10^{-2} = 2 \cdot 10^{-2} \cos \varphi$, $\cos \varphi = -1$. On peut prendre $\varphi = \pi$ rad.
La loi horaire est donc $x = 2 \cdot 10^{-2} \cos(4\pi t + \pi)$.

Remarques :
— Nous n'avons pas exploité $\overline{v_0} = 0$ car nous connaissions l'amplitude X_m, une seule équation nous suffisait pour déterminer l'inconnue φ.
— On peut aussi bien prendre $\varphi = -\pi$ rad.

e) • L'élongation en P est $x = \overline{OP} = -0,9 \text{ cm} = -9 \cdot 10^{-3}$ m.
Le mobile M passe en P à des instants de date t telle que :

$$-9 \cdot 10^{-3} = 2 \cdot 10^{-2} \cos(4\pi t + \pi)$$

soit $$\cos(4\pi t + \pi) = -0,45.$$

Cherchons un angle α, en rad, tel que $\cos \alpha = -0,45$. Votre calculatrice donne $\alpha = 2,037$ rad.

D'où $$\cos(4\pi t + \pi) = \cos 2,037 \quad \text{en u. S.I.}$$

(Rappelons que si $\cos y = \cos \alpha$, $y = \alpha + 2k\pi$ ou $y = -\alpha + 2k\pi$.)

• Première série de solutions :

$$4\pi t + \pi = 2{,}037 + 2k\pi$$
$$t = -8{,}79 \cdot 10^{-2} + 0{,}5k$$

(remarquons que $0{,}5k = kT$).
La première solution positive de cette série (n'oublions pas qu'on cherche les passages après $t = 0$), correspond à $k = 1$, la deuxième à $k = 2$, ... D'où la première série de solutions {0,412 s; 0,912 s; ...}.

• Deuxième série de solutions :

$$4\pi t + \pi = -2{,}037 + 2k\pi$$
$$t = -0{,}412 + 0{,}5k.$$

La première solution positive de cette série correspond à $k = 1$, la deuxième à $k = 2$, ...
D'où la deuxième série de solutions {+0,088 s; 0,588 s; ...}.

• Ordonnons les solutions par valeurs croissantes de t :

{0,088 s; 0,412 s; 0,588 s; 0,912 s; ...}.

La troisième valeur $t = 0{,}588$ s correspond au passage de M pour la troisième fois, après $t = 0$, en P.

E 5. *(Pendule élastique horizontal.) Une tige rigide horizontale* AB *est fixée en* A *à un support fixe. Un ressort, de masse négligeable, enfilé sur la tige* AB, *est fixé en* A *à ce même support. L'autre extrémité* C *est liée à un solide* S *de masse* m. *Ce solide et le ressort peuvent coulisser sans frottement le long de la tige* AB. *Le ressort n'étant ni comprimé, ni étiré, le centre d'inertie* G *du solide occupe une position notée* G_0, *position que l'on prendra pour origine des abscisses. L'axe des abscisses est orienté positivement de* A *vers* B.

a) *On exerce sur le solide* S *une force horizontale de sens* A *vers* B. *Le centre d'inertie de* S *se trouve alors dans une position* G_1 *d'abscisse* x_1 *égale à* $5 \cdot 10^{-2}$ m. *L'expérimentateur lâche le solide sans vitesse initiale.*
La masse de S *est* m = 100 g, *la constante de raideur du ressort est* $k = 30\ N \cdot m^{-1}$.
Établir l'équation du mouvement du centre d'inertie G *en choisissant pour instant* $t = 0$, *l'instant auquel le solide est lâché.*

b) *A quelle vitesse* G *passe-t-il par l'origine des abscisses?*

c) *Montrer que l'énergie mécanique du système masse-ressort est constante. Quelle est sa valeur?*

(D'après bac)

65 Énergie potentielle élastique.

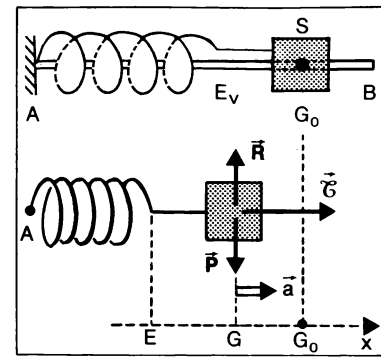
• Soit E l'extrémité libre du ressort, E_v la position de cette extrémité lorsque le ressort est à vide : dans cette position le ressort n'a pas emmagasiné d'énergie élastique, son énergie potentielle élastique $E_p = 0$ (c'est l'état de référence).

• Lorsque le ressort est allongé ou comprimé, le « vecteur allongement » est $\overrightarrow{E_vE}$, la tension du ressort est $\vec{\mathcal{T}} = -k\overrightarrow{E_vE}$ (revoir ℳ 16), l'énergie potentielle élastique en réserve dans le ressort est :

$$E_p = \frac{1}{2} k (E_vE)^2.$$

S 5. *a*) Présentation de la démarche : nous allons montrer en établissant l'équation différentielle du mouvement que l'oscillateur est harmonique, pour cela nous allons appliquer le théorème du centre d'inertie au solide S, à un instant t quelconque; l'oscillateur oscillant librement, l'équation différentielle nous permet de déterminer la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur; l'excitation initiale nous précisera la loi horaire du mouvement.

• Le système est le solide S. Le repère, lié à la Terre, est pratiquement galiléen.
A l'instant t, le vecteur accélération du centre d'inertie de S est $\vec{a}$, parallèle à l'axe G_0x, de mesure algébrique sur cet axe $\bar{a} = \ddot{x}$.
Le système est soumis à :
— son poids $\vec{P}$ dû à la Terre;
— la réaction $\vec{R}$ de la tige AB, perpendiculaire à cette tige puisque les frottements sont négligeables (pour alléger la figure du bas, cette tige n'y est pas dessinée);
— la tension du ressort $\vec{\mathcal{T}} = -k\overrightarrow{E_vE} = -k\overrightarrow{G_0G}$ puisque la distance EG reste constante. (Sur la figure le ressort est comprimé, $\vec{\mathcal{T}}$ est vers la droite; à d'autres instants lorsque le ressort est allongé $\vec{\mathcal{T}}$ est vers la gauche.)



D'après le théorème du centre d'inertie $\vec{P} + \vec{R} - k\overrightarrow{G_0G} = m\vec{a}$, projetons sur l'axe G_0x :

$$-k\overline{G_0G} = m\bar{a}$$

soit
$$-kx = m\ddot{x}$$

ou
$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Cette équation différentielle montre que l'oscillateur ressort-masse est harmonique, de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 17{,}3 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, de loi horaire $x = X_m \cos(17{,}3t + \varphi)$.

• Pour déterminer l'amplitude X_m et la phase initiale φ, exploitons les données de l'excitation initiale communiquée à l'oscillateur :

$$\text{à } t = 0 \quad \left| \begin{array}{l} x_0 = x_1 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ \overline{v_0} = 0. \end{array} \right.$$

D'après les expressions

$$x = X_m \cos(17{,}3t + \varphi) \quad \text{et} \quad \bar{v} = \dot{x} = -17{,}3X_m \sin(17{,}3t + \varphi),$$

$$\text{à } t = 0 \quad \left| \begin{array}{l} x_0 = X_m \cos\varphi \\ \overline{v_0} = -17{,}3X_m \sin\varphi. \end{array} \right.$$

En comparant on en déduit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} X_m \cos\varphi = 5 \cdot 10^{-2} & (1) \\ -17{,}3X_m \sin\varphi = 0. & (2) \end{array} \right.$$

Nous recherchons un couple de valeurs ($X_m > 0$ et φ) qui convienne.
D'après (2), on peut prendre $\varphi = 0$, en reportant dans (1) $X_m = 5 \cdot 10^{-2}$ m.
La loi horaire du mouvement est donc $x = 5 \cdot 10^{-2} \cos 17{,}3\,t$ en u. S.I.

b) La vitesse algébrique du solide S en translation est :
$\bar{v} = -17{,}3 \times 5 \cdot 10^{-2} \sin 17{,}3\,t$ soit $\bar{v} = -0{,}865 \sin 17{,}3\,t$ en u. S.I.
Lorsque G passe par l'origine, $x = 0$, c'est-à-dire $\cos 17{,}3\,t = 0$, par suite $|\sin 17{,}3\,t| = 1$, et $|\bar{v}| = 0{,}865\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.
(Nous nous rendons compte que c'est la vitesse maximale de S au cours de son mouvement.)

c) • Le système est l'ensemble solide-ressort. A un instant t quelconque, $x = X_m \cos \omega_0 t$ et $\bar{v} = -X_m\, \omega_0 \sin \omega_0 t$.

• La masse du ressort étant négligée, l'énergie cinétique du système E_c se confond avec celle du solide S en translation :

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m X_m^2 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t.$$

Comme $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $E_c = \frac{1}{2} k X_m^2 \sin^2 \omega_0 t$.

• Au même instant l'énergie potentielle élastique du ressort est :

$$E_p = \frac{1}{2} k (E_v E)^2 = \frac{1}{2} k (G_0 G)^2 = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} k X_m^2 \cos^2 \omega_0 t.$$

• L'énergie mécanique du système $E = E_p + E_c$ est égale à :

$$E = \frac{1}{2} k X_m^2 \sin^2 \omega_0 t + \frac{1}{2} k X_m^2 \cos^2 \omega_0 t$$

$$= \frac{1}{2} k X_m^2 (\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t) = \frac{1}{2} k X_m^2.$$

Elle est constante.

Numériquement $E = \frac{1}{2} \times 30 \times (5 \cdot 10^{-2})^2 = 3{,}75 \cdot 10^{-2}$ J.

E 6. *(Pendule élastique vertical.) Un ressort, à spires non jointives, de masse négligeable, a une constante de raideur* k. *L'une des extrémités du ressort est fixée à un support rigide lié à la Terre. A l'autre extrémité* E *est suspendu un solide* S *de masse* $m = 100$ g. *On donne* $g = 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

a) *A l'équilibre le ressort est allongé de* $b = 4$ cm. *Quelle est la constante de raideur du ressort?*

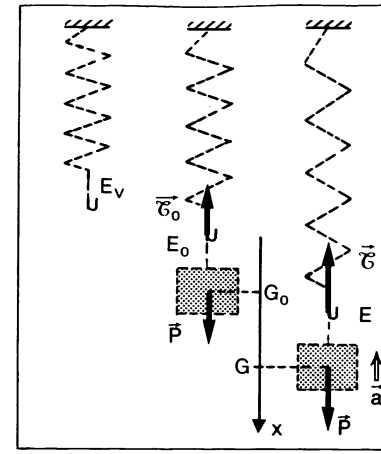
b) *On tire sur le solide* S, *verticalement, vers le bas et on le laisse aller.* S *prend alors un mouvement de translation rectiligne verticale.*

α) *Quelle est la nature du mouvement de* S?

β) *A la date* $t = 0$, S *passe par sa position la plus basse située* 2 cm *sous sa position la plus élevée. Quelle est la loi horaire du mouvement?*

γ) *L'énergie potentielle totale du système (solide* S, *Terre, ressort), comprenant l'énergie potentielle élastique et l'énergie potentielle de pesanteur, est prise égale à zéro pour la position d'équilibre. Montrer qu'avec cette convention l'énergie mécanique de l'oscillateur est égale à l'énergie cinétique maximale de* S *et qu'elle est proportionnelle au carré de l'amplitude des oscillations.*

S 6. *a*) Soit E_v la position de l'extrémité du ressort à vide (ou à tension nulle), E_0 la position lorsque le système ressort-solide S est en équilibre. La tension du ressort est alors $\vec{\mathcal{C}}_0 = -k\overrightarrow{E_v E_0}$.
Le solide S étant en équilibre sous l'action de $\vec{\mathcal{C}}_0$ et de son poids $\vec{P}$: $\vec{P} - k\overrightarrow{E_v E_0} = \vec{0}$. (1)



En norme : $\|\vec{P}\| = k\|\overrightarrow{E_v E_0}\|$

$mg = kb.$

Par suite $k = \dfrac{mg}{b} = 24{,}5\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$.

b) α) • Présentation de la démarche : soit G_0 la position du centre d'inertie de S à l'équilibre; lorsque le solide oscille G_0 est le centre du mouvement; si on veut aboutir à l'équation différentielle $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ caractérisant un oscillateur harmonique, il est nécessaire de repérer la position du centre d'inertie G du solide à partir de G_0 (revoir ℳ 64).

• Repérons le solide en translation verticale par $\overline{G_0G} = x$ mesuré sur l'axe vertical descendant G_0x.

• Considérons le solide en mouvement à un instant t : son vecteur accélération par rapport à la Terre est $\vec{a}$, vertical, de mesure algébrique $\bar{a}$ sur G_0x; il est soumis à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et à la tension $\vec{\mathcal{C}}$ du ressort telle que $\vec{\mathcal{C}} = -k\overrightarrow{E_v E} = -k(\overrightarrow{E_v E_0} + \overrightarrow{E_0 E}) = -k\overrightarrow{E_v E_0} - k\overrightarrow{G_0 G}$ (puisque la distance EG étant constante, le déplacement de E est égal au déplacement de G).
D'après le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{P} - k\overrightarrow{E_v E_0} - k\overrightarrow{G_0 G} = m\vec{a}.$$

Compte tenu de la condition d'équilibre (1) : $-k\overrightarrow{G_0 G} = m\vec{a}$.
Projetons sur G_0x : $-kx = m\bar{a} = m\ddot{x}$.
On aboutit finalement à $\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0$. Cette équation différentielle montre que l'oscillateur (solide S en translation-ressort) est harmonique, de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = 15{,}65\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

β) • La loi horaire du mouvement est de la forme $x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$.

• La position la plus basse est séparée de la position la plus élevée de la distance $2X_m$, par suite $2X_m = 2\cdot 10^{-2}$ m, l'amplitude X_m est donc égale à 10^{-2} m.

• Pour déterminer la phase initiale φ, traduisons qu'à la date $t = 0$, le point G est écarté au maximum vers le bas, donc dans le sens positif choisi : $x_0 = +X_m$.
D'après $x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$, à $t = 0$ $x_0 = X_m \cos\varphi$. En comparant on en déduit $\cos\varphi = 1$, on peut prendre $\varphi = 0$.

• En résumé la loi horaire du mouvement est :

$$x = 10^{-2} \cos 15{,}65\ t \text{ en unités S.I.}$$

γ) • Si on néglige les frottements, le système (ressort-solide S-Terre) ne reçoit aucun travail de l'extérieur : son énergie mécanique $E = E_{pp} + E_{pe} + E_c$ se conserve (E_{pp} : énergie potentielle de pesanteur, E_{pe} : énergie potentielle élastique).

• Pour évaluer E considérons le passage par la position d'équilibre G_0 :

$$E = (E_{pp} + E_{pe})_0 + E_{c_0}.$$

D'après la convention imposée, $(E_{pp} + E_{pe})_0 = 0$, donc $E = E_{c_0}$.

• Évaluons donc E_{c_0}.
La vitesse du solide S en translation $\bar{v} = \dot{x} = -X_m \omega_0 \sin \omega_0 t$ (avec $X_m = 10^{-2}$ m et $\omega_0 = 15{,}65$ rad·s^{-1}), son énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m X_m^2 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t$.

Pour le passage par G_0, $x = 0$, donc $\cos \omega_0 t = 0$ et $\sin^2 \omega_0 t = 1$.

Par suite $E_{c_0} = \frac{1}{2} m X_m^2 \omega_0^2$.

• En résumé, l'énergie mécanique $E = E_{c_0} = \frac{1}{2} m X_m^2 \omega_0^2$: elle est proportionnelle au carré de l'amplitude du mouvement.

E 7. *Un palet sur coussin d'air est mobile sur une table horizontale, sa masse* $m = 0{,}5$ kg. *Il est maintenu entre deux ressorts* R′ *et* R, *tendus entre deux points fixes* A′ *et* A. *Les deux ressorts ont des masses négligeables, le coefficient de raideur de* R′ *est* $k' = 20$ N·m^{-1}, *celui de* R *est* $k = 30$ N·m.

a) *A l'équilibre le ressort* R′ *est allongé de* $b' = 9$ cm, *quel est l'allongement* b *de* R?

b) *On écarte le centre d'inertie* G *du palet de sa position d'équilibre* G_0, *en l'amenant en un point* G_1 *de la droite* A′A, *puis on l'abandonne. Montrer que l'ensemble constitue un oscillateur harmonique :*

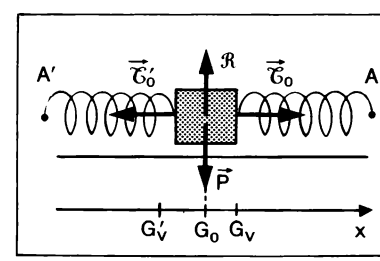
α) *en utilisant le théorème du centre d'inertie;*

β) *en utilisant la conservation de l'énergie mécanique du système* (R, R′, *palet*).

S 7. *a*) • Soit G'_v la position de G lorsque le ressort R′ est à vide, c'est-à-dire à tension nulle, à l'équilibre le « vecteur allongement » de R′ est $\overrightarrow{G'_v G_0}$, la tension de R′ est $\vec{\mathcal{T}}'_0 = -k' \overrightarrow{G'_v G_0}$.

• Soit G_v la position de G lorsque le ressort R est à vide, à l'équilibre le « vecteur allongement » de R est $\overrightarrow{G_v G_0}$, la tension de R est $\vec{\mathcal{T}}_0 = -k \overrightarrow{G_v G_0}$.

• Le palet est en équilibre sous l'action de son poids $\vec{P}$; de l'action du coussin d'air $\vec{\mathcal{R}}$, perpendiculaire à la table, donc verticale, vers le haut; de la tension $\vec{\mathcal{T}}'_0$ de R′, de la tension $\vec{\mathcal{T}}_0$ de R. D'où :



$$\vec{P} + \vec{\mathcal{R}} - k' \overrightarrow{G'_v G_0} - k \overrightarrow{G_v G_0} = \vec{0}.$$

Projetons sur l'axe G_0x : $-k'\overline{G'_vG_0}-k\overline{G_vG_0}=0.$ (1)

$$\overline{G'_vG_0}=b';\qquad \overline{G_vG_0}=-b.$$

Par suite (1) s'écrit $k'b'=kb$, d'où $b=\dfrac{k'b'}{k}=6$ cm.

b) • Présentation de la démarche : pour montrer que l'oscillateur est harmonique, il suffit de montrer que l'équation différentielle du mouvement est de la forme : $\ddot{x}+Kx=0$ avec $K>0$ et avec $x=\overline{G_0G}$.

α) A l'instant t, le palet a un vecteur accélération $\vec{a}$, parallèle à G_0x, puisque le palet est en translation rectiligne. La mesure algébrique de $\vec{a}$ sur G_0x est $\bar{a}=\dot{x}$.
Le palet est soumis aux forces $\vec{P}$, $\vec{\mathcal{R}}$, $\vec{\mathcal{C}'}=-k'\overrightarrow{G'_vG}$ et $\vec{\mathcal{C}}=-k\overrightarrow{G_vG}$.
D'après le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{P}+\vec{\mathcal{R}}-k'\overrightarrow{G'_vG}-k\overrightarrow{G_vG}=m\vec{a}.$$

Faisons intervenir le centre du mouvement G_0 :

$$\vec{P}+\vec{\mathcal{R}}-k'\overrightarrow{G'_vG_0}-k'\overrightarrow{G_0G}-k\overrightarrow{G_vG_0}-k\overrightarrow{G_0G}=m\vec{a}.$$

Projetons sur G_0x :

$$-k'\overline{G'_vG_0}-k'\overline{G_0G}-k\overline{G_vG_0}-k\overline{G_0G}=m\bar{a}.$$

En tenant compte de la condition d'équilibre (1), et en remarquant que $\overline{G_0G}=x$:

$$-(k'+k)\,x=m\bar{a}=m\ddot{x}.$$

On détermine ainsi l'équation différentielle du mouvement :

$$\ddot{x}+\frac{(k'+k)}{m}x=0.$$

Il s'ensuit que l'oscillateur est harmonique de pulsation propre :

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k'+k}{m}}=10\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}.$$

β) • Le système (R, R', palet) est soumis à dès forces extérieures (son poids $\vec{P}$, la réaction $\vec{\mathcal{R}}$ du coussin d'air, l'action du support en A et en A') qui ne travaillent pas : son énergie mécanique E reste constante au cours de son mouvement.

• Le palet étant en translation son énergie cinétique $E_c=\dfrac{1}{2}m\overline{v^2}$.

• L'énergie potentielle élastique emmagasinée dans le ressort R' lorsque le centre d'inertie du palet occupe la position G est (revoir $\mathcal{M}$ 65)

$$E'_p=\frac{1}{2}k'(\overline{G'_vG})^2=\frac{1}{2}k'(\overline{G'_vG_0}+\overline{G_0G})^2=\frac{1}{2}k'(b'+x)^2.$$

• L'énergie potentielle élastique du ressort R est :

$$E_p=\frac{1}{2}k(\overline{G_vG})^2=\frac{1}{2}k(\overline{G_vG_0}+\overline{G_0G})^2=\frac{1}{2}(-b+x)^2.$$

• L'énergie mécanique $E = E'_p + E_p + E_c = C^{te}$, par suite :

$$\frac{1}{2} k'(b' + x)^2 + \frac{1}{2} k(-b + x)^2 + \frac{1}{2} m \overline{v^2} = C^{te}.$$

Développons et ordonnons :

$$\frac{x^2}{2}(k' + k) + x(k'b' - kb) + \frac{1}{2} k'b'^2 + \frac{1}{2} kb^2 + \frac{1}{2} m \overline{v^2} = C^{te}.$$

D'après la condition d'équilibre $k'b' - kb = 0$, regroupons de plus les termes constants à droite :

$$\frac{x^2}{2}(k' + k) + \frac{1}{2} m \overline{v^2} = C^{te} - \frac{1}{2} k'b'^2 - \frac{1}{2} kb^2.$$

Dérivons les deux membres de cette égalité par rapport au temps, en remarquant que la dérivée de x^2 est $2x\dot{x}$, que la dérivée de $\overline{v^2} = 2\overline{v}\dot{\overline{v}} = 2\dot{x}\ddot{x}$, que la dérivée d'une constante est nulle :

$$x\dot{x}(k' + k) + m\dot{x}\ddot{x} = 0$$

soit

$$\dot{x}[x(k' + k) + m\ddot{x}] = 0.$$

Cette égalité est vérifiée quel que soit $\dot{x}$, ce qui entraîne :

$$x(k' + k) + m\ddot{x} = 0.$$

L'équation différentielle du mouvement $\ddot{x} + \dfrac{k' + k}{m} x = 0$ est de la forme $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, en posant $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k' + k}{m}}$, par suite l'oscillateur est harmonique de pulsation propre ω_0.

E 8. *Un solide* S, *de masse* m, *de centre d'inertie* G, *est astreint à se déplacer d'un mouvement de translation rectiligne, sans frottement, le long d'un banc à coussin d'air incliné d'un angle* α *par rapport à l'horizontale. Il est attaché à l'une des extrémités d'un ressort de masse négligeable, de raideur* k, *de longueur à vide* ℓ_0, *dont l'autre extrémité est liée à un point fixe* F.
A l'équilibre la longueur du ressort est ℓ_1, G *est en* G_0, *origine des abscisses. Les spires resteront non jointives dans tout le problème; l'axe du ressort est parallèle à la trajectoire de* G.

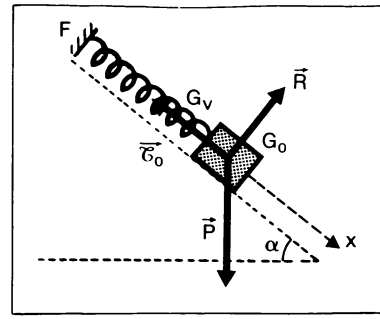
a) *Faire l'inventaire des forces appliquées au solide* S *à l'équilibre. Écrire l'équation d'équilibre et en déduire la constante* k *en fonction de* m, ℓ_0, ℓ_1, α *et* g.
Application numérique : $g = 9{,}8\ m \cdot s^{-2}$; $m = 0{,}20$ kg; $\ell_0 = 10$ cm; $\ell_1 = 14$ cm; $\alpha = 30°$.

b) *On écarte le solide de sa position d'équilibre de façon à exciter l'oscillateur. Déterminer l'équation différentielle du mouvement de* G; *que peut-on dire de l'oscillateur?*

c) *Le solide* S, *étant à sa position d'équilibre, on le lance, parallèlement au banc, vers le bas à la date* $t = 0$, *à la vitesse* $|v_0| = 0{,}30\ m \cdot s^{-1}$. *Quelle est la loi horaire du mouvement?*

(D'après bac)

S 8. *a*) • Le solide S est soumis :
— à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ dû à la Terre;
— à l'action du coussin d'air $\vec{R}$, perpendiculaire au banc puisque les frottements sont négligeables;
— à la tension $\vec{\mathcal{T}_0}$ du ressort. Soit G_v la position du centre d'inertie du solide lorsque le ressort est à vide (c'est-à-dire à tension nulle), le « vecteur allongement » du ressort à l'équilibre est $\overrightarrow{G_v G_0}$ de module $(\ell_1 - \ell_0)$, la tension du ressort est $\vec{\mathcal{T}_0} = -k\overrightarrow{G_v G_0}$.



• Par rapport au banc, c'est-à-dire par rapport à un repère pratiquement galiléen, le solide est en équilibre, donc :

$$\vec{P} + \vec{R} - k\overrightarrow{G_v G_0} = \vec{0}.$$

• Projetons sur l'axe G_0x, parallèle au banc, orienté vers le bas :

$$P \sin \alpha - k\overline{G_v G_0} = 0. \qquad (1)$$

Comme $\overline{G_v G_0} = +(\ell_1 - \ell_0)$, il s'ensuit :

$$k = \frac{mg \sin \alpha}{(\ell_1 - \ell_0)} = 24{,}5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}.$$

b) • Présentation de la démarche : le solide oscille autour de G_0 qui est le centre du mouvement de G; pour obtenir une équation différentielle du mouvement facile à exploiter il est nécessaire de repérer le solide par l'élongation $x = \overline{G_0 G}$; pour établir l'équation différentielle on peut utiliser le théorème du centre d'inertie ou bien la conservation de l'énergie mécanique du système (ressort, solide, Terre).

• *Première méthode* (recommandée parce que plus simple).
Le système est le solide en translation, par rapport au banc à un instant t, son vecteur accélération $\vec{a}$ est parallèle au banc, sa mesure algébrique sur l'axe G_0x est $\bar{a} = \ddot{x}$.
Le solide est soumis aux trois forces : son poids $\vec{P} = m\vec{g}$, l'action du coussin d'air $\vec{R}$, la tension du ressort $\vec{\mathcal{T}} = -k\overrightarrow{G_v G}$.
D'après le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{P} + \vec{R} - k\overrightarrow{G_v G} = m\vec{a}.$$

Faisons intervenir le centre du mouvement G_0 :

$$\vec{P} + \vec{R} - k\overrightarrow{G_v G_0} - k\overrightarrow{G_0 G} = m\vec{a}.$$

Projetons sur l'axe G_0x :

$$P \sin \alpha - k\overline{G_v G_0} - k\overline{G_0 G} = m\bar{a}.$$

En tenant compte de la condition d'équilibre (1), et en remplaçant $\overline{G_0 G}$ par x,

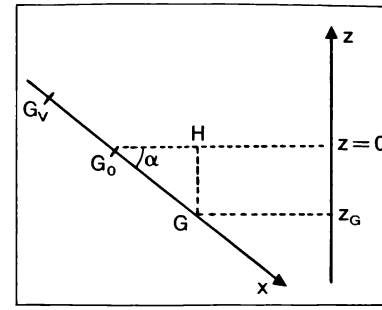
$$-kx = m\bar{a}.$$

L'équation différentielle $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ est de la forme $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$: l'oscillateur est harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 11{,}1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

• *Deuxième méthode* (compliquée car il y a deux énergies potentielles à considérer, donnons-la à titre d'entraînement).

— Le système est le solide, le ressort et la Terre. Il est soumis à des forces extérieures ($\vec{R}$ due au coussin d'air, action du support en F) qui ne travaillent pas : son énergie mécanique se conserve.

— Soit $E_{pp} = Pz_G$ l'énergie potentielle de pesanteur, l'état de référence étant le solide à sa position d'équilibre. L'axe des z est orienté vers le haut (revoir ℳ 24).



Dans le triangle rectangle G_0HG, $\sin\alpha = \dfrac{HG}{G_0G} = \dfrac{|z_G|}{|x|}$.

Donc $|z_G| = |x| \sin\alpha$.

D'autre part, lorsque x est positif, z_G est négatif (cas de la figure); lorsque x est négatif, z_G est positif.

Donc $z_G = -x \sin\alpha$ et $E_{pp} = -Px \sin\alpha$.

— Soit E_{pe} l'énergie potentielle élastique en réserve dans le ressort :

$$E_{pe} = \frac{1}{2} k \overline{G_v G}^2 = \frac{1}{2} k (\overline{G_v G_0} + \overline{G_0 G})^2 = \frac{k}{2} \overline{G_v G_0}^2 + k \overline{G_v G_0} x + \frac{1}{2} kx^2.$$

— Le solide étant en translation son énergie cinétique par rapport à la Terre est $E_c = \dfrac{1}{2} mv^2 = \dfrac{1}{2} m\overline{v^2}$.

— L'énergie mécanique $E = E_{pp} + E_{pe} + E_c$ étant constante :

$$-Px \sin\alpha + \frac{k}{2} \overline{G_v G_0}^2 + k \overline{G_v G_0}\, x + \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} m\overline{v^2} = C^{te}.$$

D'après la condition d'équilibre (1) $-Px \sin\alpha + k\overline{G_v G_0}\, x = 0$. Dérivons l'égalité simplifiée par rapport au temps, en remarquant que la dérivée de x^2 est $2x\dot{x}$, de $\overline{v^2}$ est $2\overline{v}\dot{\overline{v}} = 2\dot{x}\ddot{x}$, d'une constante est zéro.

Il s'ensuit $\qquad kx\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} = 0$

soit $\qquad \dot{x}(kx + m\ddot{x}) = 0.$

Cette égalité est vérifiée quel que soit $\dot{x}$, ce qui entraîne :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0.$$

Cette équation différentielle est de la forme $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$: l'oscillateur est harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = 11{,}1 \text{ rad} \cdot s^{-1}$.

• *Loi horaire du mouvement.*

La loi horaire est de la forme $x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$, l'amplitude X_m et la phase initiale sont déterminées par l'état de mouvement initial.

— D'après les expressions

$$x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \qquad \text{et} \qquad \overline{v} = \dot{x} = -X_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

$$\text{à } t = 0 \quad \begin{cases} x_0 = X_m \cos \varphi \\ \overline{v_0} = -X_m \omega_0 \sin \varphi. \end{cases}$$

— D'après les données de l'énoncé, en remarquant que le solide étant lancé vers le bas, dans le sens positif de G_0x, $\overline{v_0} = |v_0| = 0{,}30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

D'où

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ \overline{v_0} = 0{,}30. \end{cases}$$

— En comparant :

$$\begin{cases} X_m \cos \varphi = 0 & (1) \\ -X_m \omega_0 \sin \varphi = 0{,}30. & (2) \end{cases}$$

— Nous recherchons un couple $(X_m > 0; \varphi)$ qui convienne.

D'après (1), on peut prendre $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ ou $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ rad. Si on reporte $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ on trouve X_m négatif; si on reporte $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, on trouve

$$X_m = \frac{0{,}30}{-11{,}1 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = 2{,}70 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

— Par suite la loi horaire du mouvement est $x = 2{,}70 \cdot 10^{-2} \cos\left(11{,}1\, t - \frac{\pi}{2}\right)$ en u. S.I.

— *Remarque.* $\cos\left(11{,}1\, t - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 11{,}1\, t\right) = \sin 11{,}1\, t$; la loi horaire peut donc aussi s'écrire $x = 2{,}70 \cdot 10^{-2} \sin 11{,}1\, t$.

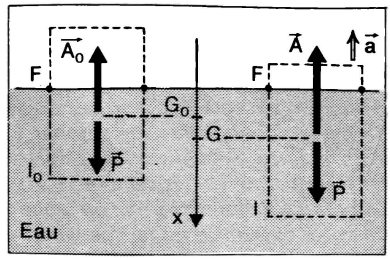
E 9. *Un bloc de bois homogène, de masse* $m = 600$ g, *flotte sur une grande nappe d'eau. Le bloc a la forme d'un parallélépipède rectangle, ses faces horizontales ont pour surface* $S = 80 \text{ cm}^2$.

A partir de la position d'équilibre on enfonce légèrement le bloc et on le laisse aller. Le bloc prend un mouvement de translation verticale, sa face supérieure restant toujours hors de l'eau et horizontale.

On néglige les frottements contre l'eau et l'air. Que peut-on dire du mouvement du bloc? Déterminer sa période.

Donnée. L'eau exerce sur la partie immergée une force $\vec{A}$ *(dite poussée d'Archimède), verticale, vers le haut, de module* $A = V\mu g$ (V : *volume de bloc immergé;* $\mu = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$: *masse volumique de l'eau;* $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$).

S 9. • Présentation de la démarche : nous allons d'abord étudier la position d'équilibre du bloc (nous obtiendrons une condition d'équilibre qui nous permettra de simplifier la condition de mouvement); le bloc en mouvement de translation sera repéré par l'élongation $\overline{G_0G} = x$ mesurée à partir de la position d'équilibre; grâce au théorème du centre d'inertie nous déterminerons l'équation différentielle du mouvement.



• Le bloc à l'équilibre a son centre d'inertie en G_0, sa face inférieure est repérée par I_0, le niveau de l'eau affleure en F. Le volume de bloc immergé est $\overline{FI_0} \cdot S$ (en mesurant $\overline{FI_0}$ sur l'axe vertical descendant G_0x). La poussée d'Archimède $\vec{A_0}$ a pour module $A_0 = \overline{FI_0} \cdot S\mu g$.

Le bloc est en équilibre sous l'action de $\vec{A_0}$ et de son poids $\vec{P} = m\vec{g}$, par suite :

$$\vec{P} + \vec{A_0} = \vec{0}$$

soit en projetant sur G_0x : $P - \overline{FI_0} S\mu g = 0$. (1)

• Le bloc en mouvement de translation verticale autour de G_0, centre du mouvement de G, a un vecteur accélération $\vec{a}$, vertical, de mesure algébrique sur G_0x, $\bar{a} = \ddot{x}$.

Lorsque le bloc a son centre d'inertie en G, sa face inférieure est en I, la profondeur immergée est $\overline{FI}$; le volume immergé est $\overline{FI} \cdot S$.

Comme $\overline{FI} = \overline{FI_0} + \overline{I_0I}$ et comme $\overline{I_0I} = \overline{G_0G} = x$ puisque les deux points I et G subissent le même déplacement, il s'ensuit $\overline{FI} = \overline{FI_0} + x$.

La poussée d'Archimède $\vec{A}$ a alors pour module :

$$A = (\overline{FI_0} + x)\, S\mu g.$$

Sous l'action des forces $\vec{A}$ et $\vec{P}$, le bloc prend un vecteur accélération tel que, d'après le théorème du centre d'inertie, valable puisque tacitement le repère est lié à la Terre, $\vec{P} + \vec{A} = m\vec{a}$.

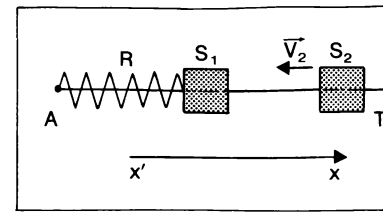
Projetons sur G_0x : $P - A = m\bar{a}$

soit : $P - \overline{FI_0} \cdot S\mu g - xS\mu g = m\bar{a} = m\ddot{x}$.

D'après la condition d'équilibre (1) $P - \overline{FI_0} \cdot S\mu g = 0$, par suite on aboutit à l'équation différentielle $\ddot{x} + \dfrac{S\mu g}{m} x = 0$.

Cette équation est du type $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$: l'oscillateur est donc harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{S\mu g}{m}}$; de période propre $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\dfrac{m}{S\mu g}} = 0{,}54$ s.

E 10. *Deux solides* S_1 *et* S_2 *de masses respectives* $M_1 = 0{,}10$ kg *et* $M_2 = 0{,}40$ kg *peuvent glisser sans frottement sur une tige horizontale* T. *Le solide* S_1 *est lié à l'extrémité d'un ressort* R *à spires non jointives, de masse négligeable, de raideur* $k = 30$ N·m^{-1}. *L'autre extrémité du ressort est fixée en* A *à la tige* T. *L'ensemble* [S_1, R] *étant à l'équilibre,* R *non déformé, on lance* S_2 *placé à l'autre extrémité de la tige vers* S_1. *Au moment du choc, il y a accrochage des deux solides, formant alors un ensemble solidaire* S *de centre d'inertie* G.



a) *Avant le choc la vitesse du centre d'inertie de* S_2 *étant* $V_2 = 0{,}4$ m·s^{-1}, *déterminer la vitesse* $\vec{V}$ *du centre d'inertie* G *de* S *juste après le choc.*

b) *Quelle est l'énergie mécanique* E *de l'oscillateur* [R, S] *juste après le choc?*

c) *Sachant que les frottements sont négligeables que peut-on dire de cette énergie mécanique au cours du mouvement pris par* S. *En déduire :*

α) *la nature du mouvement de* S;

β) *l'amplitude du mouvement de* S.

Note : Les spires du ressort restent non jointives tout au long du mouvement de S.

(D'après bac)

S 10. *a*) Le système considéré pour étudier le choc est l'ensemble [S_1, S_2]. Les poids $\vec{P_1}$ et $\vec{P_2}$ sont compensés par les réactions de la tige horizontale, pendant la durée très brève du choc S_1 reste pratiquement sur place, le ressort R reste à tension nulle. Par suite, le système [S_1, S_2] est isolé, sa quantité de mouvement se conserve.

— Avant le choc $\vec{p} = \vec{p_1} + \vec{p_2} = \vec{0} + M_2\vec{V_2}$.

— Après le choc mou $\vec{p} = (M_1 + M_2)\,\vec{V}$.

— Donc $M_2\vec{V_2} = (M_1 + M_2)\,\vec{V}$.

L'ensemble [S_1, S_2] part vers A, à la vitesse $V = \dfrac{M_2 V_2}{M_1 + M_2} = 0{,}32$ m·s^{-1}.

b) (Rédaction abrégée.)

• L'énergie mécanique du système (solide S, ressort) juste après le choc est :

$$E_0 = E_{p_0} + E_{c_0}.$$

• $E_{c_0} = \dfrac{1}{2}(M_1 + M_2)\,V^2 = 2{,}56 \cdot 10^{-2}$ J.

• $E_{p_0} = 0$ car le ressort n'est alors ni tendu, ni comprimé.

• Par suite $E_0 = 2{,}56 \cdot 10^{-2}$ J.

c) • Le système [R, S] est soumis à des forces extérieures (poids de S, réaction de T, action du support en A) qui ne travaillent pas : son énergie mécanique $E = E_p + E_c$ reste constante et égale à E_0.

• α) Soit G_0 la position du centre d'inertie de S juste après le choc, G_0 est le centre du mouvement. Repérons S par $\overline{G_0G} = x$ mesuré sur l'axe x'x indiqué.

L'énergie potentielle élastique du ressort lorsque S a l'abscisse x est $E_p = \frac{1}{2} k \overline{G_0 G}^2 = \frac{1}{2} kx^2$ (bien remarquer que G_0 correspond à la position « ressort à vide »).

L'énergie cinétique de S est $E_c = \frac{1}{2} (M_1 + M_2) \overline{v}^2$ en désignant par $\overline{v}$ la vitesse algébrique de S.

Par suite $$\frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} (M_1 + M_2) \overline{v}^2 = E_0.$$

Dérivons par rapport au temps :

$$\frac{1}{2} k \times 2x\dot{x} + \frac{1}{2} (M_1 + M_2) \times 2\overline{v}\dot{\overline{v}} = 0.$$

Comme $\overline{v} = \dot{x}$ et $\dot{\overline{v}} = \ddot{x}$, on aboutit à :

$$\dot{x}[kx + (M_1 + M_2)\ddot{x}] = 0.$$

Cette égalité est vérifiée quel que soit $\dot{x}$, par suite :

$$\ddot{x} + \frac{k}{M_1 + M_2} x = 0.$$

Cette équation différentielle de la forme $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ nous indique que le mouvement de S est de translation rectiligne sinusoïdale, de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M_1 + M_2}} = 7{,}75 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

β) (Rédaction abrégée.)

Considérons le passage de S par la position d'abscisse $x = X_m$, alors :

$$E_p = \frac{1}{2} kX_m^2$$

$E_c = 0$ car $v = 0$ (changement de sens de S).

Donc $\frac{1}{2} kX_m^2 + 0 = E_0 = 2{,}56 \cdot 10^{-2}$, d'où $X_m = 4{,}13 \cdot 10^{-2}$ m.

• *Remarque.* L'énoncé a demandé de traiter ce problème par des considérations énergétiques sinon on aurait pu, bien sûr, utiliser le théorème du centre d'inertie (revoir E 5).

E 11. *Un oscillateur est constitué de deux ressorts* R *et* R′ *et d'un solide* S *de masse* m = 160 g.

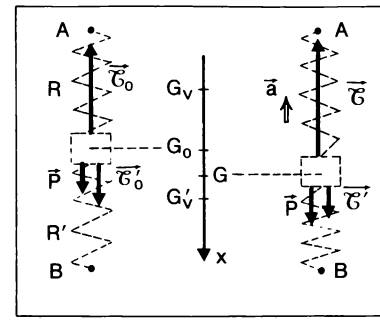
L'extrémité supérieure de R *est accrochée à un point fixe* A, *l'extrémité inférieure au solide* S. *L'extrémité supérieure de* R′ *est accrochée à* S, *l'inférieure à un point fixe* B *situé sur la même verticale que* A. *La distance* AB *est telle que les deux ressorts restent toujours tendus au cours du mouvement de l'oscillateur.*

On donne : raideur de R : $k = 50 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$
raideur de R′ : $k' = 40 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$
intensité de la pesanteur : $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

a) *A l'équilibre le ressort* R *est allongé de* b = 8 cm, *quel est l'allongement* b′ *de* R′?

b) *On tire légèrement* S *vers le bas, on le laisse aller sans vitesse,* S *prend un mouvement de translation verticale. Montrer que l'oscillateur est harmonique et calculer sa période. Les frottements sont négligeables.*

S 11. *a*) • Soit G_v la position qu'il faudrait donner au centre d'inertie du solide S pour que le ressort R supérieur ne soit pas tendu, soit G'_v la position qu'il faudrait donner pour que le ressort R′ ne soit pas tendu, enfin soit G_0 la position du centre d'inertie à l'équilibre.



• Le solide en équilibre par rapport à la Terre, repère pratiquement galiléen, est soumis à la tension $\vec{\mathcal{C}}_0 = -k\,\overrightarrow{G_v G_0}$ de R, à la tension $\vec{\mathcal{C}}'_0 = -k'\,\overrightarrow{G'_v G_0}$ de R′, à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$.

Par suite
$$-k\,\overrightarrow{G_v G_0} - k'\,\overrightarrow{G'_v G_0} + m\vec{g} = \vec{0}. \qquad (1)$$

Projetons sur l'axe vertical G_0x orienté vers le bas :
$$-k\,\overline{G_v G_0} - k'\,\overline{G'_v G_0} + mg = 0$$
$\overline{G_v G_0} = +b$, $\overline{G'_v G_0} = -b'$, donc $-kb + k'b' + mg = 0$.

Par suite
$$b' = \frac{kb - mg}{k'} = 6 \cdot 10^{-2}\ \text{m} = 6\ \text{cm}.$$

b) • Présentation de la démarche : pour démontrer que l'oscillateur est harmonique il suffit de montrer que l'équation différentielle de son mouvement est de la forme $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, la variable de position x représentant l'élongation de G, c'est-à-dire $\overline{G_0 G}$.

• Nous allons déterminer l'équation différentielle du mouvement à l'aide du théorème du centre d'inertie.
— Le système est le solide S.
— Le repère lié à la Terre est quasi galiléen.

— Le solide S est soumis à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$, à la tension $\vec{\mathcal{C}} = -k\,\overrightarrow{G_v G}$ de R, à la tension $\vec{\mathcal{C}}' = -k'\,\overrightarrow{G'_v G}$ de R′. Comme il est en mouvement de translation verticale son vecteur accélération $\vec{a}$ est vertical, de mesure algébrique $\bar{a}$ sur G_0x.

— D'après le théorème du centre d'inertie :
$$-k\,\overrightarrow{G_v G} - k'\,\overrightarrow{G'_v G} + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

Faisons intervenir G_0, centre du mouvement de G :
$$-k\,\overrightarrow{G_v G_0} - k\,\overrightarrow{G_0 G} - k'\,\overrightarrow{G'_v G_0} - k'\,\overrightarrow{G_0 G} + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

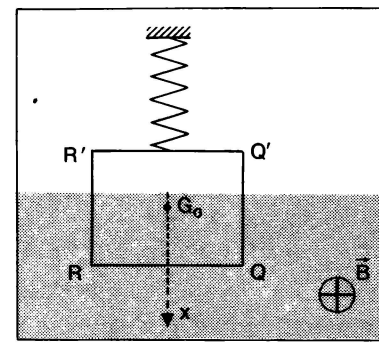
D'après la condition d'équilibre (1), la condition de mouvement précédente se simplifie en $-(k + k')\,\overrightarrow{G_0 G} = m\vec{a}$.

— Projetons sur l'axe G_0x :

$$-(k+k')\,x = m\,\bar{a} = m\,\ddot{x}.$$

On détermine ainsi l'équation différentielle du mouvement $\ddot{x} + \dfrac{(k+k')}{m}\,x = 0$, cette équation de la forme $\ddot{x} + \omega_0^2\,x = 0$ nous indique que l'oscillateur est harmonique (ou sinusoïdal) de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k+k'}{m}} = 23{,}7 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, de période propre $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 0{,}265 \text{ s}$.

E 12. *Un cadre indéformable rectangulaire* R'RQQ', *de masse* m = 150 g, *est suspendu à un ressort de coefficient de raideur* k = 15 $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$. *Il comprend* N = 200 spires. *Ce cadre pourra se déplacer d'un mouvement de translation verticale. Au cours de ce mouvement :*
— *le côté inférieur* RQ, *horizontal, restera baigné par un champ magnétique uniforme* $\vec{B}$ *horizontal, perpendiculaire au plan du cadre;*
— le côté supérieur R'Q' restera toujours en dehors de cet espace champ magnétique.



a) *Quelle est la condition d'équilibre du cadre? On montrera que cette condition est la même que le cadre constitue un circuit ouvert ou un circuit fermé.*

b) *Le cadre est ouvert en Q' (cas de la figure).*

α) *On écarte le cadre de sa position d'équilibre, vers le bas, de* 1 cm *et on le laisse aller, sans vitesse, à la date* t = 0. *Montrer que le mouvement est de translation sinusoïdale. Établir l'expression de la vitesse algébrique* $\bar{v}$ *du cadre en fonction du temps.*

β) *En déduire l'expression de la tension électrique* u *aux bornes du cadre en fonction du temps. On donne* B = 0,2 T *et* ℓ = RQ = 0,08 m. *On néglige le champ magnétique terrestre.*

c) *Le cadre est fermé en Q'.*
Montrer que les oscillations du cadre s'amortissent rapidement.

S 12. *a)* • Le cadre à l'équilibre est-il soumis à des forces de Laplace (revoir ℳ 41)? Pour que des forces de Laplace s'exercent sur les fils baignés par le champ magnétique, il faut que ces fils soient parcourus pour un courant d'intensité I :
— si le circuit constituant le cadre est ouvert, évidemment I = 0, il n'y a pas de force de Laplace;
— si le circuit est fermé et si le cadre reste immobile à sa position d'équilibre, le flux magnétique à travers le cadre reste constant, la f.é.m. d'induction $e = -\dfrac{d\Phi}{dt}$ reste constamment nulle, I = 0, il n'y a pas de force de Laplace.

• En résumé le cadre (qu'il soit en circuit ouvert ou fermé), à l'équilibre, n'est soumis qu'à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et à la tension $\vec{\mathcal{C}_0}$ du ressort. Soit G_0 la position du centre d'inertie du cadre à l'équilibre, G_v la position qu'il faudrait donner à ce centre d'inertie pour que le ressort soit à vide :

$$\vec{\mathcal{C}_0} = -k\overrightarrow{G_v G_0}.$$

• La condition d'équilibre, par rapport à la Terre, est donc :

$$m\vec{g} - k\overrightarrow{G_v G_0} = \vec{0}. \qquad (1)$$

b) α • Présentation de la démarche : le cadre étant ouvert, la f.é.m. d'induction qui prend naissance dans les fils RQ en mouvement dans le champ magnétique, ne donne naissance à aucun courant induit, par suite il m'apparaît aucune force de Laplace; pour repérer le cadre nous poserons $\overline{G_0 G} = x$ mesuré algébriquement sur l'axe vertical descendant $G_0 x$; grâce au théorème du centre d'inertie nous allons déterminer l'équation différentielle du mouvement.

• Le cadre en translation verticale par rapport à la Terre a un vecteur accélération $\vec{a}$ vertical, de mesure algébrique $\bar{a} = \ddot{x}$ sur $G_0 x$.
Le cadre est soumis à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et à la tension $\vec{\mathcal{C}} = -k\overrightarrow{G_v G}$ du ressort.
D'après le théorème du centre d'inertie, valable car le repère Terre est pratiquement galiléen, $m\vec{g} - k\overrightarrow{G_v G} = m\vec{a}$.
Faisons intervenir le point G_0, centre du mouvement de G :

$$m\vec{g} - k\overrightarrow{G_v G_0} - k\overrightarrow{G_0 G} = m\vec{a}. \qquad (2)$$

D'après la condition d'équilibre (1), la condition de mouvement se simplifie en $-k\overrightarrow{G_0 G} = m\vec{a}$.
Projetons sur l'axe $G_0 x$, en remarquant que $\overline{G_0 G} = x$, que $\bar{a} = \ddot{x}$:

$$-kx = m\ddot{x}.$$

L'équation différentielle $\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0$ de la forme $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ nous indique que le mouvement du cadre est de translation sinusoïdale, de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

• La loi horaire du mouvement est de la forme :

$$x = X_m \cos(10\,t + \varphi).$$

Déterminons X_m et φ d'après l'état de mouvement initial :
— D'après les expressions $x = X_m \cos(10\,t + \varphi)$ et $\bar{v} = \dot{x} = -X_m \omega \sin(10\,t + \varphi)$,

$$\text{à } t = 0 \quad \left| \begin{array}{l} x_0 = X_m \cos\varphi \\ \overline{v_0} = -X_m \omega \sin\varphi. \end{array} \right.$$

— D'après les données de l'énoncé :

$$\text{à } t = 0 \quad \left| \begin{array}{l} x_0 = +10^{-2} \text{ m} \\ \overline{v_0} = 0. \end{array} \right.$$

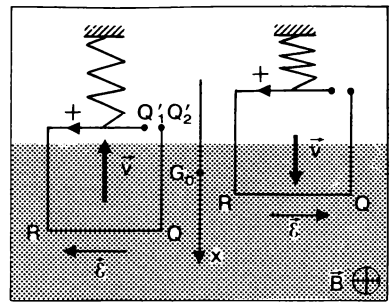
— En comparant :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_m \cos\varphi = 10^{-2} \\ -X_m \omega \sin\varphi = 0. \end{array} \right.$$

Le couple $\varphi = 0$ et $X_m = 10^{-2}$ m convient : la loi horaire du mouvement est donc $x = 10^{-2} \cos 10\,t$ (en u. S.I.).
La vitesse algébrique $\bar{v}$ (mesurée sur l'axe vertical descendant G_0x) est :

$$\bar{v} = \dot{x} = -0{,}1 \sin 10\,t \text{ (en u. S.I.).}$$

β) • Présentation de la démarche, les fils en translation à la vitesse $\vec{v}$ dans le champ magnétique uniforme $\vec{B}$ sont baignés par un champ électromoteur d'induction $\vec{\mathcal{E}} = \vec{v} \wedge \vec{B}$ (revoir ℳ 58). Le champ électromoteur $\vec{\mathcal{E}}$ perpendiculaire à $\vec{B}$ et à $\vec{v}$ est parallèle à RQ, il ne crée donc pas de f.é.m. d'induction dans les portions de fil verticales plongées dans le champ magnétique; il prend naissance dans les N fils horizontaux RQ une f.é.m. d'induction totale $e_{RQ} = N\vec{\mathcal{E}} \cdot \overrightarrow{RQ}$ (il faut multiplier par N car il y a N fils).



• Pour calculer e_{RQ} en fonction de $\bar{v}$, distinguons deux cas :
— Le vecteur vitesse du cadre est vertical, vers le haut; dans ce cas $\bar{v} < 0$, $\bar{v} = -v$.
Le champ électromoteur $\vec{\mathcal{E}} = \vec{v} \wedge \vec{B}$, parallèle à RQ, a un sens tel que le trièdre $(\vec{v}, \vec{B}, \vec{\mathcal{E}})$ soit direct : il va de Q vers R. Son module est $\mathcal{E} = vB$.
Par suite $e_{RQ} = N\vec{\mathcal{E}} \cdot \overrightarrow{RQ} = -NvB\ell = N\bar{v}\,B\ell$.
— Le vecteur vitesse $\vec{v}$ est vertical, vers le bas; dans ce cas $\bar{v} > 0$, $\bar{v} = +v$. Cette fois-ci le champ électromoteur $\vec{\mathcal{E}}$ a le sens R vers Q, et :

$$e_{RQ} = NvB\ell = N\bar{v}\,B\ell.$$

— Par suite quel que soit le sens de $\vec{v}$: $e_{RQ} = N\bar{v}\,B\ell$.
• Le sens + choisi le long des fils du cadre va de Q_1' vers Q_2', appelons $u = V_{Q_1'} - V_{Q_2'}$.
D'après la loi d'Ohm (revoir ℳ 53), $u = ri - e_{RQ} = -e_{RQ}$ puisque le circuit, de résistance r, est ouvert.
Par suite $u = -N\bar{v}\,B\ell = -200 \times (-0{,}1 \sin 10\,t) \times 0{,}2 \times 0{,}08$
$u = 0{,}32 \sin 10\,t$ en unités S.I.

c) — *Premier niveau d'explication :* le cadre étant fermé, il apparaît un courant induit qui, d'après la loi de Lenz, tend par ses effets électromagnétiques à s'opposer au mouvement : le cadre est ainsi freiné, son mouvement s'amortit très vite.

— *Deuxième niveau d'explication :* le cadre étant fermé, il naît un courant induit qui a le sens indiqué par $\vec{\mathcal{E}}$. Il apparaît donc des forces de Laplace sur les fils baignés par le champ magnétique. Les forces de Laplace sur les brins de fil verticaux se compensent, seule joue donc un rôle la force de Laplace sur RQ.
Lorsque $\vec{v}$ est vers le haut, la force de Laplace sur RQ est :

$$\vec{F} = NI\overrightarrow{QR} \wedge \vec{B} \text{ : elle est verticale vers le bas.}$$

Lorsque $\vec{v}$ est vers le bas, la force de Laplace sur RQ est :

$$\vec{F} = NI\overrightarrow{RQ} \wedge \vec{B} \text{ : elle est verticale vers le haut.}$$

On constate ainsi que $\vec{F}$ qui a toujours le sens opposé au vecteur vitesse $\vec{v}$ tend à freiner le cadre.

— *Remarque.* Le troisième niveau d'explication nécessiterait qu'on établisse l'équation différentielle du mouvement, cette équation n'est plus de la forme $\ddot{x} + Kx = 0$ avec $K > 0$ et x élongation de G : l'oscillateur n'est plus harmonique.

E 13. *Un oscillateur en rotation (appelé pendule de torsion) est constitué :*
— d'un disque homogène dont la face supérieure horizontale a pour centre O;
— d'un fil de torsion OA, *vertical, soudé au disque en* O, *fixé à un support en* A.
La masse du disque est $m = 30$ g, *son rayon est* $R = 5$ cm, *son moment d'inertie par rapport à l'axe vertical* OA *est* $J = \frac{1}{2} mR^2$. *Le fil a une constante de torsion* $C = 6 \cdot 10^{-3}$ N·m·rad^{-1}.

a) *Quelle est la tension et la torsion du fil* OA *lorsque l'oscillateur est en équilibre? On donne* $g = 9{,}8$ m·s^{-2}.

b) *On communique à l'oscillateur une énergie mécanique* E *égale à* 2 mJ.

α) *Établir, par des considérations énergétiques, l'équation différentielle du mouvement de rotation. (On suppose les frottements négligeables.) En déduire la pulsation propre de l'oscillateur.*

β) *Quelle est l'amplitude* θ_m *des oscillations?*

γ) *A la date* $t = 0$, *l'élongation angulaire est maximale, quelle est la loi horaire du mouvement?*

c) *A partir de l'équation différentielle, déterminer la relation entre le moment du couple de torsion* $\overline{\Gamma_t}$, *le moment d'inertie du disque* J *et l'accélération angulaire.*

66 Énergie potentielle de torsion.

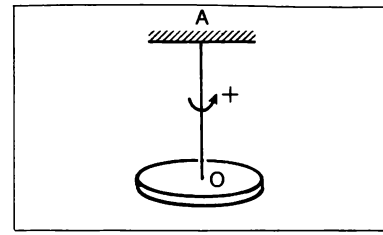
• Lorsqu'un fil de torsion (ou un ressort spiral) n'est pas tordu, son énergie potentielle de torsion est nulle.
• Lorsque le fil de torsion (ou le ressort spiral) est tordu de θ, nous savons que le fil exerce alors un couple de torsion $\overline{\Gamma_t} = -C\theta$ (revoir ℳ 48), il possède alors en réserve l'énergie potentielle de torsion

$$E_p = \frac{1}{2} C\theta^2.$$

S 13 *a*) Le système considéré est le disque en équilibre par rapport à la Terre. Ce disque est soumis à l'action de la Terre caractérisée par la force $\vec{P} = m\vec{g}$, à l'action du fil de torsion caractérisée par la tension $\vec{\mathcal{T}}$ du fil et le couple de torsion $\overline{\Gamma_{t,0}}$.

• Deux conditions d'équilibre (revoir ℳ 44) doivent être satisfaites
— d'une part $\vec{P} + \vec{\mathcal{T}} = \vec{0}$; (1)
— d'autre part, par rapport à l'axe OA, $\overline{\mathcal{M}_{\vec{P}}} + \overline{\mathcal{M}_{\vec{\mathcal{T}}}} + \overline{\Gamma_{t,0}} = 0$. (2)
D'après (1), $\mathcal{T} = P = mg = 30 \cdot 10^{-3} \times 9{,}8 = 0{,}294$ N.
D'après (2), comme $\overline{\mathcal{M}_{\vec{P}}} = 0$ ($\vec{P}$ s'applique sur l'axe OA), comme $\overline{\mathcal{M}_{\vec{T}}} = 0$ ($\vec{T}$ s'applique sur OA), il s'ensuit que $\overline{\Gamma_{t,0}} = 0$: le fil OA n'est donc pas tordu à l'équilibre.

b) α) • Le système est le disque et le fil de torsion OA. Ce système est soumis à deux forces extérieures : l'action du support en A, l'action de la Terre (le poids $\vec{P}$ du disque). Au cours du mouvement ces deux forces ne travaillent pas : l'énergie mécanique du système reste constante.



• L'énergie mécanique $E = E_p + E_c$, en désignant par E_p l'énergie potentielle de torsion et E_c l'énergie cinétique. Repérons le disque en mouvement par son abscisse angulaire θ mesurée, suivant le sens + indiqué autour de OA, à partir de la position d'équilibre (pour cette raison θ est aussi appelé l'élongation angulaire).
A un instant t, l'élongation angulaire est θ, l'énergie potentielle de torsion est $E_p = \frac{1}{2} C\theta^2$, la vitesse angulaire est $\dot{\theta}$, l'énergie cinétique du disque (donc du système) est $E_c = \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2$, l'énergie mécanique a donc pour expression $E = \frac{1}{2} C\theta^2 + \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2$.

• Comme cette énergie reste constante, la dérivée de E par rapport au temps est nulle. En remarquant que la dérivée de θ^2 est $2\theta\dot{\theta}$, que la dérivée de $\dot{\theta}^2$ est $2\dot{\theta}\ddot{\theta}$, on obtient :

$$C\theta\dot{\theta} + J\ddot{\theta}\dot{\theta} = 0$$

soit
$$\dot{\theta}(C\theta + J\ddot{\theta}) = 0.$$

Cette égalité doit être vérifiée quelle que soit la vitesse angulaire $\dot{\theta}$, par suite on aboutit à l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta} + \frac{C}{J}\theta = 0. \qquad (1)$$

• Cette équation différentielle est de la forme $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$: l'oscillateur « pendule de torsion » est harmonique, de pulsation propre :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J}} = \sqrt{\frac{2C}{mR^2}} = 12{,}65 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

β) Considérons un passage du disque par l'une de ses positions extrêmes, alors :
— la vitesse angulaire $\dot{\theta} = 0$, $E_c = 0$;
— l'énergie potentielle de torsion est maximale et est égale à $\frac{1}{2} C\theta_m^2$;
— l'énergie mécanique $E = E_c + E_p = \frac{1}{2} C\theta_m^2$.

Par suite $\theta_m^2 = \frac{2E}{C}$, d'où $\theta_m = \sqrt{\frac{2E}{C}} = 0{,}816$ rad.

γ) • La loi horaire du mouvement est de la forme $\theta = \theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = 0{,}816 \cos(12{,}65\,t + \varphi)$, il ne reste plus qu'à déterminer φ.

• A la date $t = 0$:
— d'après la loi horaire $\theta_0 = \theta_m \cos \varphi$;
— d'après l'énoncé $\theta_0 = \theta_m$ (puisque l'élongation angulaire est maximale);
— par suite $\cos \varphi = 1$, on peut prendre $\varphi = 0$.

• La loi horaire est donc $\theta = 0{,}816 \cos(12{,}65\,t)$ en unités S.I.

c) Lorsque le fil est tordu de θ, le moment du couple de torsion est $\overline{\Gamma_t} = -C\theta$. D'après l'équation différentielle (1), $-C\theta = J\ddot{\theta}$, par suite :

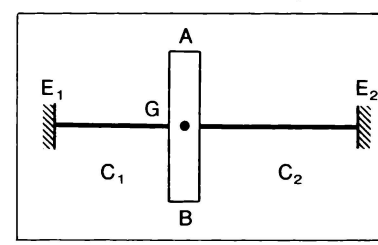
$$\overline{\Gamma_t} = J\ddot{\theta}.$$

67 La relation fondamentale de la dynamique de rotation.

• Le résultat précédent se généralise :
— soit un solide mobile autour d'un axe Δ, fixe dans un repère galiléen;
— soit J_Δ le moment d'inertie du solide par rapport à Δ;
— soit $\Sigma \overline{\mathcal{M}}$ la somme des moments des actions extérieures s'exerçant sur le solide à un instant t;
— soit $\ddot{\theta}$ l'accélération angulaire du solide au même instant;
— alors $\Sigma \overline{\mathcal{M}} = J_\Delta \ddot{\theta}$.

• Cette formule rappelle le théorème du centre d'inertie $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$.

E 14. *Une tige* E_1E_2, *horizontale, traverse une barre* AB *au niveau de son centre d'inertie* G. *Une soudure, en* G, *lie rigidement la barre* AB *à la tige* E_1E_2. *La tige* E_1E_2 *a une masse négligeable devant celle de* AB. *Les extrémités de la tige* E_1E_2 *sont fixées à un support rigide.*
Les constantes de torsion de GE_1 *et de* GE_2 *sont respectivement* $C_1 = 8 \cdot 10^{-2}$ N·m·rad^{-1} *et* $C_2 = 6 \cdot 10^{-2}$ N·m·rad^{-1}. (C_1 *est plus grand que* C_2 *car* GE_1 *est plus court que* GE_2.)
Lorsque AB *est en équilibre, les deux portions de tige ne sont pas tordues. On tourne la barre* AB *de 90° autour de l'axe horizontal* Δ, *matérialisé par* E_1E_2, *et on la laisse aller sans vitesse.*

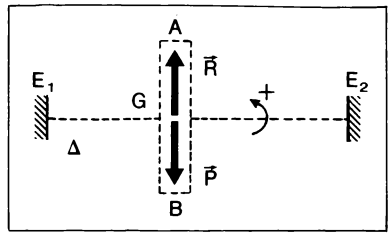


a) *Montrer, de deux façons différentes, que l'oscillateur en rotation autour de* Δ *est harmonique. On néglige les frottements.*

b) *Sachant que sa période propre est* $T_0 = 0{,}70$ s, *quel est le moment d'inertie de la barre* AB *par rapport à* Δ?

c) *Quelle est la vitesse curviligne maximale,* v_{max}, *du point* A? *Ce point est situé à la distance* $\ell = 20$ cm *de l'axe* Δ.

S 14. • Présentation de la démarche : repérons la barre AB par l'abscisse angulaire θ mesurée à partir de la position d'équilibre, suivant le sens + autour de Δ indiqué sur la figure; comme à l'équilibre les deux portions de tige GE_1 et GE_2 ne sont pas tordues, lorsque l'abscisse angulaire est θ, chaque portion de tige est tordue de θ; pour déterminer l'équation différentielle du mouvement on peut appliquer la relation fondamentale de la dynamique de rotation ou exploiter la conservation de l'énergie mécanique.



• *Première méthode :* utilisation de la relation fondamentale de la dynamique de rotation.

— Le système est la barre AB qui est un solide.

— L'axe Δ de rotation est fixe par rapport à la Terre qui est un repère pratiquement galiléen.

— Considérons la barre AB, écartée de θ, lancée à l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$. Elle est soumise à l'action de la Terre caractérisée par le poids $\vec{P} = m\vec{g}$, à l'action des deux portions de tige caractérisée par la réaction $\vec{R}$ et les deux couples de torsion de moment, suivant le sens + indiqué, $\overline{\Gamma_{t_1}} = -C_1\theta$ et $\overline{\Gamma_{t_2}} = -C_2\theta$.

— D'après la relation fondamentale de la dynamique de rotation :

$$\overline{\mathcal{M}_{\vec{P}/\Delta}} + \overline{\mathcal{M}_{\vec{R}/\Delta}} + \overline{\Gamma_{t_1}} + \overline{\Gamma_{t_2}} = J_\Delta \ddot{\theta}.$$

Comme $\overline{\mathcal{M}_{\vec{P}/\Delta}} = 0$ car le poids peut être localisé en G qui est situé sur Δ, comme $\overline{\mathcal{M}_{\vec{R}/\Delta}} = 0$ car $\vec{R}$ s'applique sur Δ, on aboutit à :

$$-(C_1 + C_2)\,\theta = J_\Delta \ddot{\theta}.$$

Cette équation différentielle $\ddot{\theta} + \dfrac{(C_1 + C_2)}{J_\Delta}\theta = 0$ est de la forme $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{C_1 + C_2}{J_\Delta}}$, l'oscillateur est harmonique.

• *Deuxième méthode :* par conservation de l'énergie mecanique.

— Le système est la barre AB et les deux portions de tige GE_1 et GE_2 subissant la torsion θ lorsque l'abscisse angulaire de AB est θ.

— Le système est soumis à trois actions extérieures : celle de la Terre caractérisée par $\vec{P}$, celles des supports fixes en E_1 et en E_2. Ces trois actions ne travaillent pas, par suite l'énergie mécanique du système E reste constante au cours du mouvement.

— Cette énergie mécanique E est la somme des énergies potentielles de torsion de deux portions de tige et de l'énergie cinétique de la barre AB (qui se confond avec l'énergie cinétique du système puisque la tige E_1E_2 a une masse négligeable), d'où :

$$\frac{1}{2}C_1\theta^2 + \frac{1}{2}C_2\theta^2 + \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 = E = C^{te}.$$

— La dérivée de E par rapport au temps est nulle, en remarquant que la dérivée de θ^2 est $2\theta\dot{\theta}$, que la dérivée de $\dot{\theta}^2$ est $2\dot{\theta}\ddot{\theta}$, on aboutit à :

$$(C_1+C_2)\,\theta\dot{\theta}+J_\Delta\dot{\theta}\ddot{\theta}=0$$

soit

$$\dot{\theta}[(C_1+C_2)\,\theta+J_\Delta\ddot{\theta}]=0.$$

Cette égalité doit être vérifiée quelle que soit la vitesse angulaire $\dot{\theta}$, par suite $\ddot{\theta}+\dfrac{(C_1+C_2)}{J_\Delta}\,\theta=0$. Cette équation différentielle, de la forme $\ddot{\theta}+\omega_0^2\theta=0$, nous indique que l'oscillateur en rotation autour de Δ est harmonique, de pulsation propre $\omega_0=\sqrt{\dfrac{C_1+C_2}{J_\Delta}}$.

b) La période propre $T_0=\dfrac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\dfrac{J_\Delta}{C_1+C_2}}$.

Par suite, en élevant au carré, $T_0^2=4\pi^2\dfrac{J_\Delta}{C_1+C_2}$,

d'où

$$J_\Delta=\frac{(C_1+C_2)\,T_0^2}{4\pi^2}=1{,}74\cdot10^{-3}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2.$$

c) • La loi horaire du mouvement de l'oscillateur est de la forme $\theta=\theta_m\cos(\omega_0 t+\varphi)$. Comme on a excité l'oscillateur est l'écartant de $90°=\dfrac{\pi}{2}$ rad et en ne lui donnant aucune énergie cinétique, l'amplitude de son mouvement est $\theta_m=\dfrac{\pi}{2}$ rad. La vitesse angulaire $\dot{\theta}=-\theta_m\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi)$ a pour valeur maximale :

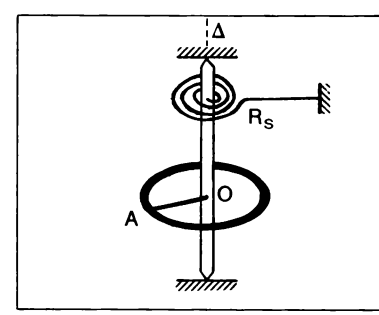
$$\dot{\theta}_{maxi}=\theta_m\omega_0=\theta_m\times\frac{2\pi}{T_0}=\frac{\pi}{2}\times\frac{2\pi}{0{,}7}=14{,}1\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}.$$

• Le point A situé à la distance $\ell=0{,}2$ m de l'axe Δ, a pour vitesse angulaire maximale $\dot{\theta}_{maxi}$, et pour vitesse curviligne maximale :

$$v_{maxi}=\ell\,\dot{\theta}_{maxi}=2{,}82\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

E 15. *Un anneau de masse* m = 6 g, *de rayon* R = 1 cm, *est maintenu solidaire d'une tige verticale par l'intermédiaire d'un rayon* OA *de masse négligeable. Cette tige peut tourner sans frottement autour de l'axe vertical* Δ.
Sur la tige est soudée l'une des extrémités d'un ressort spiral R_S, *l'autre extrémité est fixe.*
La constante de torsion du ressort spiral est :

$$C=2{,}5\cdot10^{-5}\ \text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}.$$



Le moment d'inertie de l'ensemble tournant autour de Δ, *est pratiquement* $J_\Delta = mR^2$.
Cet oscillateur excité prend un mouvement périodique.

a) *Montrer que ce mouvement est sinusoïdal, calculer sa période propre* T_0.

b) *On veut que l'oscillateur ait une période propre* $T'_0 = 1{,}00$ s, *pour cela on fixe sur le rayon* OA, *à la distance* x *de* O, *une petite boule de plomb pratiquement ponctuelle de masse* $\mu = 0{,}7$ g, *déterminer* x *à* 0,1 mm *près.*

S 15. *a*) (Rédaction abrégée.)

— Montrer qu'à l'équilibre le ressort spiral n'est pas tordu. En conséquence si on désigne par θ l'abscisse angulaire du solide en rotation autour de Δ, mesurée à partir de la position d'équilibre, θ désigne aussi la torsion du ressort.

— Exploiter soit la relation fondamentale de la dynamique (appliquée au système ensemble tournant, ressort exclu) ou bien exploiter la conservation de l'énergie mécanique (appliquée au système ensemble tournant et ressort).

On aboutira à $\ddot{\theta} + \dfrac{C}{J_\Delta}\theta = 0$, équation différentielle qui montre que l'oscillateur est harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{C}{J_\Delta}}$, de période propre

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}} = 2\pi\sqrt{\frac{mR^2}{C}} = 0{,}973 \text{ s.}$$

b) (Rédaction abrégée.)
La théorie précédente reste valable, seul le moment d'inertie de l'ensemble tournant varie, il devient $J'_\Delta = mR^2 + \mu x^2$.

Par suite
$$T'_0 = 2\pi\sqrt{\frac{mR^2 + \mu x^2}{C}}.$$

D'où
$$x = \sqrt{\frac{\dfrac{CT'^2_0}{4\pi^2} - mR^2}{\mu}} \simeq 6{,}9 \cdot 10^{-3} \text{ m} \simeq 6{,}9 \text{ mm.}$$

E 16. *Un oscillateur est constitué par un solide* S *en rotation autour d'un axe fixe* Δ.
Le moment d'inertie de S *par rapport à* Δ *est* $J_\Delta = 1{,}44 \cdot 10^{-3}$ kg·m^2.
S *est lié à un dispositif déformable* D, *de masse négligeable, emmagasinant l'énergie potentielle* E_p *variant avec la position de* S, *cette position étant repérée par l'abscisse angulaire* θ *mesurée à partir de la position d'équilibre.*
Au cours du mouvement l'altitude du centre d'inertie de S *reste constante, l'énergie potentielle* E_p *emmagasinée dans* D, *sera donc la seule énergie potentielle variable à considérer.*
Grâce à un procédé d'enregistrement qui n'amortit absolument pas l'oscillateur en mouvement de rotation, on mesure la vitesse angulaire $|\dot{\theta}|$ *pour diverses valeurs de* $|\theta|$.

$\lvert\theta\rvert$ rad	0,81	0,77	0,73	0,66	0,48	0,25	$\simeq 0$
$\lvert\dot{\theta}\rvert$ rad·s^{-1}	$\simeq 0$	1,6	2,2	3,0	4,1	4,85	5,1

a) *Quelle est l'énergie mécanique de l'oscillateur supposée constante? (L'énergie mécanique sera prise égale à zéro lorsque l'oscillateur est au repos.)*

b) *Compléter le tableau suivant :*

$\lvert\theta\rvert$ rad	0,81	0,77	0,73	0,66	0,48	0,25	$\simeq 0$
E_c							
E_p							
$\sqrt{E_p}$							

c) *Représenter la courbe* $\sqrt{E_p} = f(\theta)$. *Par quelle courbe serait représenté* $E_p = g(\theta)$?

d) *En déduire que l'oscillateur* [S; D] *est harmonique, calculer sa période propre.*

S 16. *a)* • L'énergie mécanique de l'oscillateur [S; D] est $E = E_p + E_c$ avec $E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2$.

• Lorsque l'oscillateur est au repos à sa position d'équilibre d'abscisse angulaire $\theta = 0$:
— d'une part, par convention $E = 0$;
— d'autre part, comme $\dot{\theta} = 0$ puisque l'oscillateur est immobile, $E_c = 0$;
— par suite $E_p = 0$.
L'état de référence pour l'énergie potentielle de D est donc la position $\theta = 0$.

• Considérons maintenant l'oscillateur en mouvement, comme il n'est pas amorti, son énergie mécanique E reste constante. Pour l'évaluer examinons un passage par la position d'équilibre $\theta = 0$:
— d'après ce qui précède, alors $E_p = 0$;
— d'après le tableau, pour $\theta \simeq 0$, $|\dot{\theta}| = 5{,}1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, par suite :

$$E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 = 1{,}87 \cdot 10^{-2} \text{ J};$$

— l'énergie mécanique $E = E_c + E_p = 1{,}87 \cdot 10^{-2}$ J.

b) D'après le *a*), quel que soit θ $E = 1{,}87 \cdot 10^{-2}$ J. A partir de $|\dot{\theta}|$ on peut calculer $E_c = \frac{1}{2} J_\Delta |\dot{\theta}|^2 = 7{,}2 \cdot 10^{-4} |\dot{\theta}|^2$.

L'énergie potentielle $E_p = E - E_c$, donc $E_p = 1{,}87 \cdot 10^{-2} - 7{,}2 \cdot 10^{-4} |\dot{\theta}|^2$.

On peut ainsi compléter le tableau, les unités utilisées sont le rad, le joule et $\sqrt{\text{joule}}$.

$\lvert\theta\rvert$	0,81	0,77	0,73	0,66	0,48	0,25	$\simeq 0$
$E_c \times 10^3$	0	1,84	3,48	6,48	12,1	16,9	18,7
$E_p \times 10^3$	18,7	16,9	15,2	12,2	6,6	1,8	$\simeq 0$
$\sqrt{E_p} \times 10^2$	13,7	13,0	12,3	11,0	8,1	4,2	$\simeq 0$

c) • Les points de coordonnées $(\theta; \sqrt{E_p})$, aux erreurs de mesure près, s'alignent suivant une droite $\mathcal{D}$.

L'équation de cette droite linéaire est de la forme :

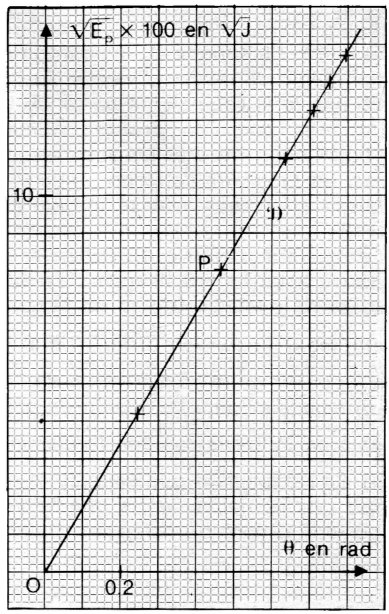
$$\sqrt{E_p} = a\theta.$$

Pour déterminer le coefficient directeur a, écrivons que la droite $\mathcal{D}$ passe par le point P de coordonnées :

$(0{,}48;\ 8{,}1 \cdot 10^{-2}) : 8{,}1 \cdot 10^{-2} = a \times 0{,}48,$

d'où $a = 0{,}169.$

Par suite $\sqrt{E_p} = 0{,}169\ \theta$, en unités S.I.



• Élevons au carré les deux membres de l'égalité précédente :

$$E_p = 2{,}86 \cdot 10^{-2}\ \theta^2.$$

Posons $K = 2{,}86 \cdot 10^{-2}\ J \cdot rad^{-2}$.

La courbe représentant les variations de E_p en fonction de θ, d'équation $E_p = K\theta^2$, est une parabole passant par l'origine ayant pour axe l'axe des ordonnées E_p.

d) • Comme la courbe représentant l'énergie potentielle E_p de l'oscillateur en fonction de θ est une « cuvette parabolique », cela nous suffit pour dire que l'oscillateur est harmonique.
Nous allons d'ailleurs retrouver ce résultat en évaluant la période propre de l'oscillateur.

• L'énergie mécanique de l'oscillateur $E = E_p + E_c = K\theta^2 + \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2$.

La dérivée par rapport au temps de la constante E est nulle. En remarquant que la dérivée de θ^2 est $2\theta\dot{\theta}$, que celle de $\dot{\theta}^2$ est $2\dot{\theta}\ddot{\theta}$, on obtient :

$$2K\theta\dot{\theta} + J_\Delta \dot{\theta}\ddot{\theta} = 0$$

soit $\dot{\theta}(2K\theta + J_\Delta \ddot{\theta}) = 0.$

Cette égalité doit être vérifiée quel que soit $\dot{\theta}$, par suite :

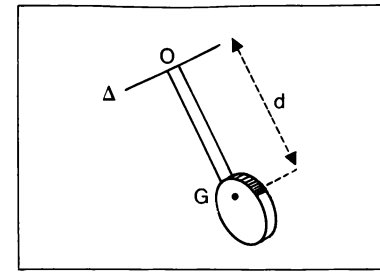
$$\ddot{\theta} + \frac{2K}{J_\Delta}\theta = 0.$$

Cette équation différentielle du mouvement de l'oscillateur, de la forme $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$, nous montre que ce dernier est harmonique (on retrouve le résultat précédent) de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{2K}{J_\Delta}}$, de période propre

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J_\Delta}{2K}}.$$

Numériquement $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{1{,}44 \cdot 10^{-3}}{2 \times 2{,}86 \cdot 10^{-2}}} = 0{,}997$ s.

E 17. *Le balancier d'une horloge est fixé à un axe horizontal* Δ, *autour duquel il peut tourner librement (les frottements sont négligeables), il constitue un «pendule pesant». On appelle* G_0 *la position d'équilibre stable du centre d'inertie du balancier. On écarte le balancier, à partir de* G_0 *(dans un sens que l'on prendra comme sens positif pour mesurer les abscisses angulaires, les moments de force, ...) de 6° et on le laisse aller sans vitesse initiale à la date* $t = 0$.



Le moment d'inertie du balancier par rapport à Δ *est* $J_\Delta = 0{,}48\ kg \cdot m^2$, *sa masse est* $m = 0{,}60\ kg$, *son centre d'inertie est à la distance* $d = OG = 0{,}80\ m$ *de l'axe* Δ. *On donne* $g = 9{,}8\ m \cdot s^{-2}$.

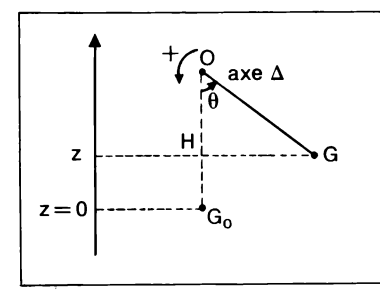
a) *Établir l'équation différentielle du mouvement du balancier :*

α) *à partir de la conservation de l'énergie mécanique du système balancier-Terre (ou du balancier dans le champ de pesanteur);*

β) *à partir de la relation fondamentale de la dynamique de rotation.*

b) *En remarquant que dans cette expérience l'excitation initiale donnée au balancier fait que le mouvement a une faible amplitude, que peut-on en déduire? Calculer la période propre du balancier. Déterminer la loi horaire de son mouvement.*

S 17. *a)* α) • Le système est le balancier et la Terre, ce système n'est soumis qu'à l'action de l'axe Δ qui ne travaille pas : son énergie mécanique E est constante.



• L'énergie cinétique du système par rapport à la Terre est $E_c = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$, en désignant par $\dot{\theta}$ la dérivée de l'abscisse angulaire $\theta = (\overrightarrow{OG_0}, \overrightarrow{OG})$ par rapport au temps.

• L'énergie potentielle du système est $E_p = mgz$, z altitude de G par rapport à la position G_0 prise comme état de référence.

$$z = G_0H = OG_0 - OH.$$

Dans le triangle rectangle OHG, $\cos\theta = \frac{OH}{OG}$.

Par suite $z = OG_0 - OG\cos\theta$, comme $OG_0 = OG = d$, $z = d(1 - \cos\theta)$.

L'énergie potentielle a donc pour expression $E_p = mgd(1 - \cos\theta)$.

• L'énergie mécanique du système $E = E_p + E_c = mgd(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2$,

c'est-à-dire $$E = mgd - mgd\cos\theta + \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2.$$

• Dérivons les deux membres de l'égalité précédente par rapport au temps : les dérivées des constantes E et mgd sont nulles; la dérivée de $\cos\theta$ par rapport à θ est $-\sin\theta$ mais par rapport au temps la dérivée est $-\sin\theta\cdot\dot{\theta}$; la dérivée de $\dot{\theta}^2$ est $2\dot{\theta}\ddot{\theta}$.

Par suite $$0 = -mgd(-\sin\theta\cdot\dot{\theta}) + J_\Delta\dot{\theta}\ddot{\theta}$$

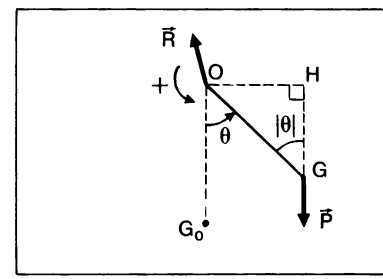
soit $$\dot{\theta}(mgd\sin\theta + J_\Delta\ddot{\theta}) = 0.$$

Cette égalité est vérifiée quel que soit $\dot{\theta}$, donc :

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_\Delta}\sin\theta = 0.$$

C'est l'équation différentielle du mouvement. Cette équation n'est pas de la forme $\ddot{\theta} + K\theta = 0$ avec $K > 0$: l'oscillateur n'est pas harmonique (son mouvement de rotation est périodique mais n'est pas sinusoïdal).

β) • Le système est le balancier qui est un solide en rotation autour de l'axe Δ fixe par rapport à la Terre.



• Le système est soumis à deux actions : l'action de la Terre représentée par le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ localisé en G, l'action de l'axe Δ, $\vec{R}$, localisée sur cet axe.

• Soit $\ddot{\theta}$ l'accélération angulaire du balancier lorsqu'il passe par la position d'élongation angulaire θ. D'après la relation fondamentale de la dynamique de rotation :

$$\overline{\mathcal{M}_{\vec{P}/\Delta}} + \overline{\mathcal{M}_{\vec{R}/\Delta}} = J_\Delta\ddot{\theta}. \qquad (1)$$

• $\overline{\mathcal{M}_{\vec{R}/\Delta}} = 0$ car $\vec{R}$ s'applique sur Δ.

• En valeur absolue $\mathcal{M}_{\vec{P}/\Delta} = P\cdot OH = mg\cdot OH$ (revoir $\mathcal{M}$ 43).

Dans le triangle rectangle OHG, $\sin|\theta| = \frac{OH}{OG}$, donc $OH = d\sin|\theta|$, par suite $\mathcal{M}_{P/\Delta} = mgd\sin|\theta|$.

Considérons maintenant le moment algébrique $\overline{\mathcal{M}_{\vec{P}/\Delta}}$:

— lorsque $\theta > 0$, $\overline{\mathcal{M}_{\vec{P}/\Delta}} < 0$;

— lorsque $\theta < 0$, $\overline{\mathcal{M}_{\vec{P}/\Delta}} > 0$ (on dit que le moment de $\vec{P}$ est de rappel car il a tendance à ramener G vers G_0).

Par suite algébriquement, $\overline{\mathcal{M}_{\vec{P}/\Delta}} = -mgd\sin\theta$.

• En reportant dans (1), on obtient :

$$-mgd\sin\theta = J_\Delta\ddot{\theta}$$

soit $\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_\Delta}\sin\theta = 0$: on retrouve l'équation différentielle du α).

b) • Si l'élongation angulaire θ reste toujours petite, alors :

$$\sin\theta \simeq \theta \text{ rad} \quad \text{(revoir } \mathcal{M} \text{ 40)},$$

l'équation différentielle devient $\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_\Delta}\theta = 0$, on dit qu'on *a linéarisé l'équation différentielle* en remplaçant $\sin\theta$ par θ (ce qui nécessite de limiter le domaine de variation de θ).

• Le balancier peut être alors considéré comme un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{J_\Delta}}$, de période propre $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{mgd}} = 2$ s.

• La loi horaire du mouvement est de la forme $\theta = \theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$, vous trouverez facilement (nous l'espérons!) $\theta = \frac{\pi}{30}\cos 2\pi\frac{t}{T_0} = 0{,}105\cos\pi t$ en unités S.I.

M 68 Expressions de la période propre de quelques oscillateurs.

Au cours des exercices précédents, nous avons étudié des oscillateurs mécaniques, certains sont très classiques, on peut à la rigueur utiliser directement l'expression de leur période propre (si l'énoncé ne demande pas de l'établir bien sûr!).
Sont considérés comme « classiques » :
— le *pendule élastique* constitué par un solide en translation horizontale (E 5) ou verticale (E 6) lié à un seul ressort de raideur k :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}};$$

— le *pendule de torsion* constitué par un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ passant par son centre d'inertie (E 13) lié à un seul fil de torsion (ou à un seul ressort spiral) de constante de torsion C :

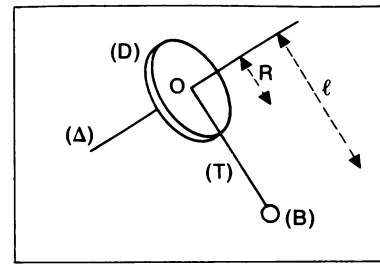
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}};$$

— *le pendule pesant* (E 17) constitué par un solide en rotation autour d'un axe fixe horizontal Δ, ne passant pas par son centre d'inertie G, effectuant des oscillations de faible amplitude, alors OG désignant la distance de G à Δ :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{mg \cdot OG}}.$$

E 18. *Une tige* (T), *une bille* (B) *et un disque* (D) *constituent un solide* (S) *pouvant osciller, sans frottement autour d'un axe* (Δ), *horizontal, fixe, perpendiculaire en* O *au plan du disque. Le disque* (D) *homogène, de masse* M, *de rayon* R, *a pour moment d'inertie par rapport à* Δ, $J_\Delta = \frac{1}{2}MR^2$. *La tige* (T) *a l'une de ses extrémités soudée en* O, *elle est dans le plan du disque, sa masse est négligeable, sa longueur* $\ell = 3R$.

La bille (B), *pratiquement ponctuelle est soudée à l'extrémité inférieure de* (T), *sa masse est* $m = \frac{M}{4}$.



a) *Exprimer en fonction de* m *et* ℓ *le moment d'inertie de* (S) *par rapport à* Δ.

b) *Évaluer en fonction de* ℓ, *la distance* OG = d (G *centre d'inertie du solide* (S)).

c) *Que peut-on dire du mouvement oscillatoire de* (S), *autour de sa position d'équilibre, lorsque les oscillations ont une faible amplitude. Calculer la période propre de* (S) *sachant que* $\ell = 40$ cm *et* $g = 9{,}8\ m \cdot s^{-2}$.

d) *Sachant que l'amplitude du mouvement est* $\alpha = 0{,}1$ rad, *quelle est la vitesse curviligne maximale de la bille* B?

S 18. *a*) La bille (B) étant ponctuelle, son moment d'inertie par rapport à Δ est $m\ell^2$.

Le disque a pour moment d'inertie $J_\Delta = \frac{1}{2} MR^2 = \frac{1}{2}(4\,m) \times \left(\frac{\ell}{3}\right)^2 = \frac{2}{9} m\ell^2$.

Le moment d'inertie de (S), par rapport à (Δ) est donc :

$$J'_\Delta = m\ell^2 + \frac{2}{9} m\ell^2 = \frac{11}{9} m\ell^2.$$

b) G est le barycentre des centres d'inertie O et B du disque (D) et de la bille (B), affectés respectivement des coefficients M et m (revoir ℳ 9). Prenons O comme point origine :

$$(M + m)\,\overrightarrow{OG} = M\,\overrightarrow{OO} + m\,\overrightarrow{OB},$$

d'où

$$(M + m)\,\overrightarrow{OG} = m\,\overrightarrow{OB}.$$

Ces deux vecteurs ont la même norme : $(M + m)\,d = m\ell$.

Comme $M = 4\,m$, $d = \frac{m\ell}{5m} = \frac{\ell}{5}$.

c) • Lorsque les oscillations du pendule pesant S sont de faible amplitude, l'oscillateur est pratiquement harmonique : les oscillations sont de rotation sinusoïdale.

• La période propre des petites oscillations est (voir ℳ 68) :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J'_\Delta}{M'gd}}$$

en désignant par J'_Δ le moment d'inertie de (S), par M′ la masse de (S), par d la distance du centre d'inertie de (S) à l'axe.

Comme $J'_\Delta = \frac{11}{9} m\ell^2$, $M' = M + m = 5m$, $d = \frac{\ell}{5}$, on aboutit à :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{11\,m\ell^2}{9\,mg\ell}} = 2\pi \sqrt{\frac{11\,\ell}{9\,g}} = 1{,}40\ s.$$

d) La loi horaire du mouvement est de la forme $\theta = \alpha \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$, la vitesse angulaire $\dot{\theta} = -\frac{2\pi\alpha}{T_0} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$.

La vitesse angulaire maximale de tous les points de S, en particulier de (B), est donc $\dot{\theta}_{maxi} = \frac{2\pi\alpha}{T_0}$.

La vitesse curviligne maximale de (B) qui décrit un arc de cercle de rayon ℓ, est $v_{maxi} = \ell \dot{\theta}_{maxi} = \frac{2\pi\alpha\ell}{T_0} = 0{,}18 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

E 19. a) *Une bille* B *est accrochée à l'extrémité inférieure d'un ressort vertical dont l'extrémité supérieure est fixe. A l'équilibre le ressort est allongé de* ℓ. *On excite ce pendule élastique de façon que* B *prenne un mouvement de translation verticale.*

Exprimer sa période propre en fonction de ℓ *et* g.

b) *La bille* B *est maintenant accrochée à l'extrémité inférieure d'un fil inextensible, de masse négligeable, de longueur* ℓ *très supérieure au rayon de la bille. L'extrémité supérieure* O *du fil est fixe.*
On lance la bille à partir de sa position d'équilibre, le fil reste dans un plan vertical P, *la bille tourne autour d'un axe horizontal* Δ *passant par* O, *perpendiculaire à* P.
Exprimer la période des oscillations de faible amplitude de ce pendule pesant en fonction de ℓ *et* g.

S 19. *a*) • La bille B et le ressort constituent un oscillateur harmonique en translation verticale de période propre $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ (voir $\mathcal{M}$ 68) m étant la masse de la bille, k la raideur du ressort.

• Lorsque cet oscillateur est au repos, la bille est en équilibre sous l'action de la tension $\vec{\mathcal{C}}_0 = -k\overrightarrow{E_V E_0}$ (E_V extrémité du ressort à vide, E_0 extrémité du ressort à l'équilibre) et du poids $\vec{P} = m\vec{g}$ de B. Par suite :

$$-k\overrightarrow{E_V E_0} + m\vec{g} = \vec{0}.$$

En norme : $k\|\overrightarrow{E_V E_0}\| = m\|\vec{g}\|$

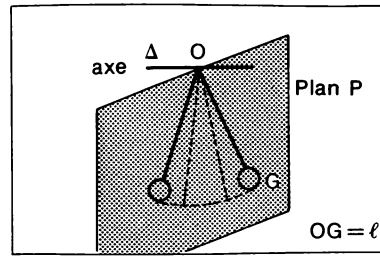
d'où $$k\ell = mg. \qquad (1)$$

Le rapport $\frac{m}{k}$ qui intervient dans l'expression de T_0, d'après (1) est égal à $\frac{\ell}{g}$.

La période propre du pendule élastique vertical a donc aussi pour expression :

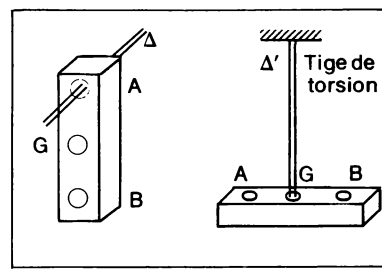
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

b) La bille et le fil tendu se comportent comme un solide S, en rotation autour de l'axe Δ.
Cet axe Δ, perpendiculaire au plan vertical P, est horizontal.
Le centre d'inertie de S est au centre de la bille à la distance $OG = \ell$ de l'axe Δ.
Soit J_Δ le moment d'inertie de S par rapport à Δ, J_Δ se confond avec le moment d'inertie de la bille par rapport à Δ : $J_\Delta = m\ell^2$.



S constitue donc un pendule pesant (on l'appelle « pendule pesant simple »).
Lorsque les oscillations sont de faible amplitude, l'oscillateur est pratiquement harmonique, sa période propre $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{J_\Delta}{mg \cdot OG}}$ (voir ℳ 68), comme $J_\Delta = m\ell^2$ et $OG = \ell$, $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m\ell^2}{mg\ell}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$.

E 20. *Un barreau est percé de trois trous, l'un passant par son centre d'inertie* G, *les autres* A *et* B *symétriques par rapport à* G *situés près des extrémités du barreau. La masse du barreau est* m = 100 g, *la distance* AG = d = 0,1 m.



a) *Dans le trou* A, *on fait passer une tige horizontale* Δ *de diamètre inférieur au diamètre du trou. De cette façon le barreau peut tourner librement autour de* Δ. *La durée de 20 petites oscillations est* 14,6 s.
Calculer le moment d'inertie J_Δ *du barreau par rapport à* Δ. *On donne* $g = 9{,}8\ m \cdot s^{-2}$.

b) *Dans le trou* G, *on coince une tige de torsion qui est ainsi rigidement liée au barreau en* G. *L'autre extrémité de la tige de torsion verticale est fixe.*
La constante de torsion de la tige est $C = 10^{-2}\ N \cdot m \cdot rad^{-1}$. *La durée de 20 oscillations est* 23 s. *Calculer le moment d'inertie* $J_{\Delta'}$, Δ' *désignant l'axe vertical passant par* G.

c) *On montre que* $J_\Delta = J_{\Delta'} + mAG^2$, *est-ce vérifié?*

S 20. (Nous ne donnons que des indications et les réponses.)

a) Pendule pesant effectuant de petites oscillations : $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J_\Delta}{mgd}}$,

d'où $$J_\Delta = \frac{mgdT^2}{4\pi^2} = 1{,}32 \cdot 10^{-3}\ kg \cdot m^2.$$

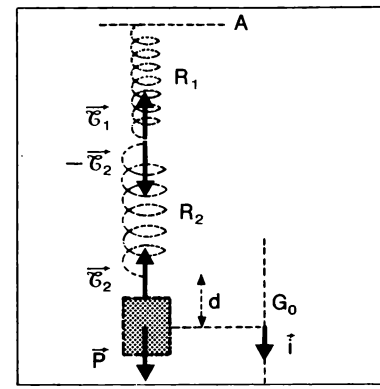
b) Pendule de torsion : $T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{J_{\Delta'}}{C}}$, d'où : $J_{\Delta'} = \dfrac{CT'^2}{4\pi^2} = 3{,}3 \cdot 10^{-4}\ kg \cdot m^2$.

c) $J_{\Delta'} + mAG^2 = 1{,}33 \cdot 10^{-3}\ kg \cdot m^2 \simeq J_\Delta$: aux erreurs de mesures près l'égalité est vérifiée.

E 21. *Un oscillateur élastique est constitué par deux ressorts* R_1 *accroché à un point fixe* A, R_2 *accroché à l'extrémité inférieure de* R_1 *et supportant une masse* $m = 100$ g, *dont le centre d'inertie* G *est situé à la distance* $d = 6$ cm *de l'extrémité inférieure de* R_2. *On donne* $g = 10\ N \cdot kg^{-1}$. *Les ressorts ont des masses négligeables.*
La longueur à vide de R_1 *est* $\ell_1 = 15$ cm, *sa raideur est* $k_1 = 20\ N \cdot m^{-1}$.
La longueur à vide de R_2 *est* $\ell_2 = 20$ cm, *sa raideur est* $k_2 = 25\ N \cdot m^{-1}$.

a) *Quels sont les allongements* b_1 *et* b_2 *des ressorts* R_1 *et* R_2 *à l'équilibre? Quelle est la distance* AG_0, G_0 *étant la position de* G *à l'équilibre?*

b) *L'oscillateur excité, la masse* m *effectue des oscillations de translation, verticales. Montrer que ces oscillations sont sinusoidales, déterminer leur pulsation.*



S 21. *a*) • Soit S la soudure, de masse négligeable, liant les ressorts R_1 et R_2. Cette soudure est soumise aux forces $\vec{\mathcal{C}}_1$ due à R_1 et $-\vec{\mathcal{C}}_2$ due à R_2.
Par suite, d'après le théorème du centre d'inertie, que la soudure soit au repos (question *a*) ou en mouvement (question *b*) : $\vec{\mathcal{C}}_1 - \vec{\mathcal{C}}_2 = \vec{0}$ puisque la masse est négligeable.
En conséquence $\vec{\mathcal{C}}_1 = \vec{\mathcal{C}}_2$: les deux ressorts ont la même tension (à l'équilibre ou en mouvement).
• Soit $\vec{i}$ un vecteur unitaire normal, vertical, descendant. A l'équilibre le vecteur allongement du ressort R_1 est $b_1\vec{i}$, sa tension est $\vec{\mathcal{C}}_1 = -k_1 b_1 \vec{i}$.
De même $\vec{\mathcal{C}}_2 = -k_2 b_2 \vec{i}$.
Comme $\vec{\mathcal{C}}_1 = \vec{\mathcal{C}}_2$, $k_1 b_1 = k_2 b_2$.
• Écrivons que la masse m est en équilibre sous l'action de $\vec{\mathcal{C}}_2$ et de son poids $\vec{P} = mg\vec{i}$:

$$-k_2 b_2 \vec{i} + mg\vec{i} = 0, \quad \text{d'où} \quad k_2 b_2 = mg.$$

• En résumé, à l'équilibre : $k_1 b_1 = k_2 b_2 = mg$, d'où $b_1 = 5$ cm et $b_2 = 4$ cm.
• $\overrightarrow{AG_0} = (\ell_1 + b_1 + \ell_2 + b_2 + d)\vec{i}$, d'où $AG_0 = \ell_1 + b_1 + \ell_2 + b_2 + d = 50$ cm.

b) • L'oscillateur étant en mouvement, le vecteur allongement du ressort R_1 à la date t est $(b_1 + x_1)\vec{i}$, x_1 étant fonction du temps.
La tension $\vec{\mathcal{C}}_1 = -k_1(b_1 + x_1)\vec{i}$.
De même $\vec{\mathcal{C}}_2 = -k_2(b_2 + x_2)\vec{i}$.
Comme $\vec{\mathcal{C}}_1 = \vec{\mathcal{C}}_2$, $k_1(b_1 + x_1) = k_2(b_2 + x_2)$;
d'où, puisque $k_1 b_1 = k_2 b_2$, $k_1 x_1 = k_2 x_2$ (1).
• Appliquons le théorème du centre d'inertie à la masse m, dans un repère lié à la Terre :

$$\vec{\mathcal{C}}_2 + \vec{P} = m\vec{a}.$$

Soit

$$-k_2(b_2 + x_2)\vec{i} + mg\vec{i} = m\bar{a}\vec{i}.$$

Après simplification par $\vec{i}$: $-k_2 b_2 - k_2 x_2 + mg = m\bar{a}$, d'après la condition d'équilibre $-k_2 b_2 + mg = 0$, par suite :

$$-k_2 x_2 = m\bar{a}. \qquad (2)$$

• A l'instant t, $\overrightarrow{AG} = (\ell_1 + b_1 + x_1 + \ell_2 + b_2 + x_2 + d)\vec{i}$.

Repérons G à partir de G_0, par l'élongation $\overline{G_0G} = x$:

$$\overrightarrow{G_0G} = \overline{G_0G}\,\vec{i} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AG_0} = (x_1 + x_2)\vec{i}.$$

D'où $x = \overline{G_0G} = (x_1 + x_2)$ (3).

• L'accélération algébrique $\bar{a}$ de G n'est autre que $\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$, la relation (2) s'écrit donc $-k_2x_2 = m\ddot{x}$ (4).

• Nous allons exprimer x_2 en fonction de x pour obtenir une équation différentielle ne faisant intervenir que la variable x.

D'après (1) : $x_1 = \frac{k_2x_2}{k_1}$; d'après (3) : $x = \frac{k_2x_2}{k_1} + x_2 = \frac{x_2(k_1 + k_2)}{k_1}$.

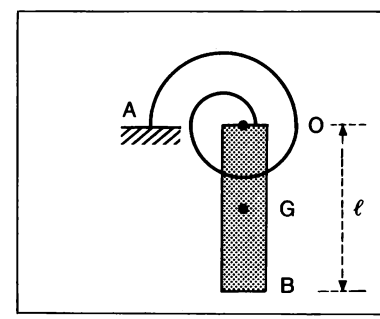
D'où $x_2 = \frac{k_1x}{k_1 + k_2}$. Reportons dans (4) :

$$-\frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}x = m\ddot{x} \quad \text{soit} \quad \ddot{x} + \frac{k_1k_2}{(k_1 + k_2)m}x = 0$$

Cette équation différentielle est de la forme $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$: l'oscillateur est harmonique de pulsation propre $\omega = \sqrt{\frac{k_1k_2}{(k_1 + k_2)m}} = 10{,}5\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

E 22. *Un oscillateur mécanique est constitué par une barre homogène, de section constante, de masse m, de longueur ℓ, pouvant tourner autour d'un axe horizontal Δ passant par son extrémité* O.

Son moment d'inertie par rapport à Δ est $J_\Delta = \frac{m\ell^2}{3}$.



Un ressort spiral a l'une de ses extrémités maintenue en un point fixe A, *a son plan perpendiculaire à Δ, a son autre extrémité fixée à la barre à proximité de Δ. Sa constante de torsion est* C.

A l'équilibre stable : la barre est verticale et le ressort spiral n'est pas tordu. L'oscillateur excité effectue des oscillations d'amplitude $\alpha = 0{,}2$ rad.

a) *Montrer que ces oscillations sont quasi harmoniques et en déduire leur période.*

Application numérique : $m = 900$ g; $\ell = 0{,}4$ m; $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $C = 0{,}826\ \text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}$.

b) *Quelle est la vitesse curviligne maximale de l'extrémité* B *de la barre?*

S 22. (Nous ne donnons que des indications et les réponses.)

a) • *Première méthode :* on écrit que l'énergie mécanique du système (ressort, barre, Terre) se conserve.

$$E = \frac{1}{2}C\theta^2 + mg\frac{\ell}{2}(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2.$$

Par dérivation : $$\dot{\theta}\left(C\theta + mg\frac{\ell}{2}\sin\theta + J_\Delta\ddot{\theta}\right) = 0$$

Comme $|\theta| \leqslant \alpha = 0{,}2$ rad, $\sin\theta \simeq \theta$ rad,

d'où l'équation différentielle $\ddot{\theta} + \dfrac{C + mg\dfrac{\ell}{2}}{J_\Delta}\theta = 0$:

l'oscillateur est harmonique de période $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{J_\Delta}{C + mg\dfrac{\ell}{2}}} = 0{,}855$ s.

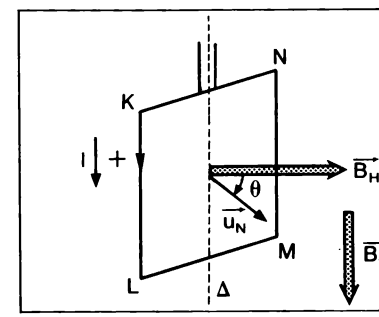
• *Deuxième méthode :* on applique le théorème de la dynamique de rotation du solide : $\Sigma \mathcal{M} = J_\Delta \ddot{\theta}$.

$-mg\dfrac{\ell}{2}\sin\theta - C\theta = J_\Delta \ddot{\theta}$, on linéarise puisque θ est petit et on aboutit à l'équation différentielle précédente.

b) $v_B = \ell\dot{\theta}$; $\dot{\theta}_{max} = \alpha\omega$; $v_{B,max} = \ell\alpha\omega = 0{,}588$ m·s^{-1}.

E 23. *Un cadre rectangulaire* KLMN *est mobile librement autour d'un axe vertical* Δ *passant par les milieux de ses côtés horizontaux. Il comprend* N = 100 *spires.*

KN = LM = a = 6 cm.
KL = NM = b = 10 cm.



Il est parcouru par un courant d'intensité I, *cheminant dans le sens positif* KLMN.

a) *Le cadre est baigné par le champ magnétique terrestre dont la composante horizontale* $\vec{B}_H$ *a pour module* $B_H = 2 \cdot 10^{-5}$ T. *On le repère par l'angle orienté* $(\vec{B}_H, \vec{u}_N) = \theta$ *exprimé en rad.*

α) *Évaluer le moment du couple électromagnétique* $\vec{\Gamma}$ *en fonction de* θ, *dépend-il de la composante verticale* $\vec{B}_V$ *du champ magnétique terrestre?*

β) *Quelle est la position d'équilibre stable du cadre?*

γ) *On écarte le cadre de cette position de façon à ce qu'il effectue des oscillations de petite amplitude. La période de ces oscillations est* $T_1 = 4{,}52$ s. *Quel est le moment d'inertie du cadre* J_Δ *par rapport à* Δ? I = 10 A.

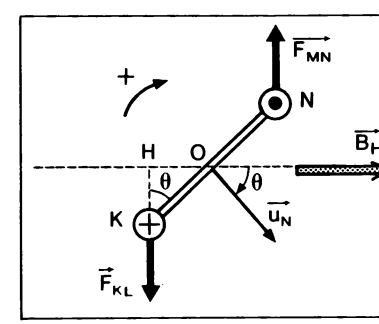
b) *Ce cadre, parcouru par un courant d'intensité* I = 0,1 A, *placé dans l'entrefer d'un électroaimant où règne un champ magnétique uniforme horizontal* $\vec{B}$, *effectue des oscillations de petite amplitude, de période* $T_2 = 0{,}37$ s. *Quel est le module de* $\vec{B}$?

S 23. (Réduction abrégée.)

a) • $\vec{F}_{KL} = NI\vec{KL} \wedge (\vec{B}_H + \vec{B}_V)$
$= NI\vec{KL} \wedge \vec{B}_H + NI\vec{KL} \wedge \vec{B}_V$.

Comme $\vec{KL}$ et $\vec{B}_V$ sont parallèles le deuxième terme est nul : $\vec{B}_V$ ne joue pas de rôle.

On montrera facilement que $\vec{F}_{KL}$ est horizontale, perpendiculaire à $\vec{B}_H$, de sens indiqué ci-contre, de module $NI\,b\,B_H$.



Le moment de $\overrightarrow{F_{KL}}$ est $\overline{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{F}_{KL}} = -F_{KL}\frac{a}{2}\sin\theta$,

d'où $\overline{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{F}_{KL}} = -NI\frac{ab}{2}B_H \sin\theta$.

• On montrera que $\overline{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{F}_{MN}} = \overline{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{F}_{KL}}$.

• Quant aux forces $\overrightarrow{F_{NK}}$ et $\overrightarrow{F_{LM}}$, elles s'appliquent sur Δ : leurs moments sont nuls.

• En résumé $\overline{\Gamma} = -NIabB_H \sin\theta$.

b) Pour la position d'équilibre $\overline{\Gamma} = 0$, d'où $\sin\theta = 0$. La position $\theta = \pi$ est une position d'équilibre instable, la position $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable (pour s'en rendre compte, il suffit de constater sur la figure que le cadre écarté de θ de sa position d'équilibre stable tend à revenir vers cette position sous l'action de $\overrightarrow{F_{KL}}$ et $\overrightarrow{F_{MN}}$).

c) • D'après le théorème de la dynamique du solide en rotation autour d'un axe fixe, $\Sigma\overline{\mathcal{M}} = J_\Delta\ddot{\theta}$. Le cadre est soumis, en plus des forces de Laplace, à son poids $\overrightarrow{P}$ et à la tension $\overrightarrow{\mathcal{C}}$ des fils de suspension supposés sans torsion puisque l'énoncé dit que le cadre tourne librement.

D'où $\overline{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{P}} + \overline{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{\mathcal{C}}} + \overline{\Gamma} = J_\Delta\ddot{\theta}$.

$\overline{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{P}} = 0$ et $\overline{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{\mathcal{C}}} = 0$ car ces forces s'appliquent sur Δ.

D'où $-NIabB_H \sin\theta = J_\Delta\ddot{\theta}$.

Pour des élongations faibles on peut linéariser en assimilant $\sin\theta$ à θ rad, $\ddot{\theta} + \frac{NIabB_H}{J_\Delta}\theta = 0$: cette équation différentielle est de la forme $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$.

Le mouvement est de rotation sinusoïdale de période $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{NIabB_H}}$.

• $J_\Delta = \frac{T_1^2 NIabB_H}{4\pi^2} = 6{,}21\cdot10^{-5}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$.

d) Réponse : $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{NIabB}}$ d'où $B = \frac{4\pi^2 J_\Delta}{NIabT_2^2} = 0{,}298\ \text{T}$.

• *Pourquoi dans* M 63, *précisez-vous* « en terminale, *la loi horaire est écrite sous les 4 formes* $x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$, ... »?

Parce qu'il y a une cinquième façon (très utilisée dans les cours à un niveau plus élevé), c'est $x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$.
Remarquons que dans toutes ces lois horaires, en plus de la pulsation ω, apparaissent deux paramètres X_m et φ, ou bien A et B, qui sont déterminés par exemple par l'état de mouvement initial.
Vous pouvez choisir la forme avec laquelle vous avez l'habitude de travailler mais n'en soyez pas esclave : certains énoncés vous imposent parfois une expression à respecter (si l'énoncé vous impose $x = X_m \sin(\omega t + \varphi)$ et si vous avez l'habitude de travailler avec $x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$, ne tombez pas dans le ridicule de transformer la fonction trigonométrique pour faire apparaître « votre » cosinus!).

• *Pourquoi utilise-t-on la même lettre* ω *pour désigner la pulsation d'un oscillateur et aussi pour désigner parfois la vitesse angulaire d'un solide en rotation?*

• Pourquoi?, nous le verrons plus tard lorsque nous présenterons « le vecteur de Fresnel associé à une fonction sinusoïdale ».

• Insistons bien sur les différences entre pulsation et vitesse angulaire :
— la pulsation ω n'est utilisée que dans les mouvements sinusoïdaux, c'est un nombre positif, donné pour un oscillateur donné;
— la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \dot{\theta}$ est utilisée pour les mouvements de rotation, elle dépend en général du temps, elle peut être positive ou négative. Ce sont donc dans les oscillateurs en rotation (pendule de torsion, pendule pesant « linéarisé » pour de petites oscillations) que l'on peut rencontrer en même temps pulsation et vitesse angulaire : il est donc vivement conseillé dans l'étude de ces oscillateurs de noter la vitesse angulaire exclusivement $\dot{\theta}$.

• *Est-ce que la masse des ressorts, des fils de torsion est toujours considérée comme négligeable?*

Les énoncés ne le précisent pas toujours mais c'est sous-entendu. L'étude d'un oscillateur [ressort pesant-masse accrochée] est fort compliquée (par exemple rien que pour évaluer l'énergie cinétique du système le calcul est difficile car les spires du ressort n'ont pas toutes la même vitesse).

• *L'équation différentielle* $\ddot{x} = Kx = 0$ *avec* $K > 0$ *impose-t-elle que* x *soit obligatoirement pris égal à zéro à l'équilibre de l'oscillateur?*

Oui, c'est très important d'en être conscient, c'est pour cela que x est souvent appelé élongation plutôt que abscisse.
En effet supposons que l'oscillateur harmonique oscille autour de la position définie par $x = x_0$ (x_0 non nul), sa loi horaire serait $x = X_m (\cos \omega t + \varphi) + x_0$.
Alors par dérivation : $\dot{x} = -X_m \omega \sin(\omega t + \varphi)$

$$\ddot{x} = -X_m \omega^2 \cos(\omega t + \varphi).$$

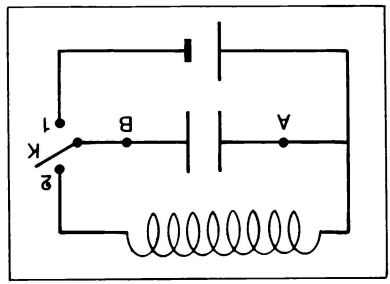
Comme $X_m \cos(\omega t + \varphi) = x - x_0$, $\ddot{x} = -\omega^2 (x - x_0)$; l'équation différentielle serait de la forme $\ddot{x} + \omega^2 (x - x_0) = 0$, et non pas de la forme $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$.

• *Qu'appelle-t-on «pendule» en physique?*

Vous avez rencontré le mot pendule dans de nombreux exercices (pendule conique dans E 24 du tome «Mécanique et électromagnétisme», pendule élastique, pendule de torsion, pendule pesant, ...).
On désigne ainsi un «appareil» dont le mouvement est périodique (pas forcément sinusoïdal : ainsi le pendule pesant a un mouvement périodique qui ne devient pratiquement sinusoïdal que pour les petites oscillations).

2 OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES LIBRES

E 24. a) *Un solénoïde placé dans l'air comprend* N = 2 000 spires, *sa longueur* ℓ = 50 cm *et son diamètre* D = 5 cm.
Établir l'expression littérale de l'auto-inductance L *de ce solénoïde, puis calculer la valeur numérique de* L. *On supposera le champ magnétique uniforme à l'intérieur du solénoïde. On rappelle que la perméabilité de l'air est voisine de celle du vide :* $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H·m^{-1} *dans le système international.*



b) *On branche ce solénoïde dans le montage, représenté sur la figure ci-contre, qui comporte : un condensateur de capacité* C = 0,5 μF *et une source de tension électrique de valeur* U_0 = 10 V.
On charge le condensateur en plaçant l'interrupteur K *en position* 1 *et on le fait ensuite se décharger dans le solénoïde en plaçant l'interrupteur dans la position* 2 *à la date* t = 0.

α) *Établir l'équation différentielle liant la charge* q *d'une armature du condensateur à sa dérivée seconde par rapport au temps. En déduire la relation* q = f(t).
(On précisera sur un schéma la convention d'orientation et le choix de l'armature considérée. On supposera que le circuit étudié ici a une résistance négligeable.)

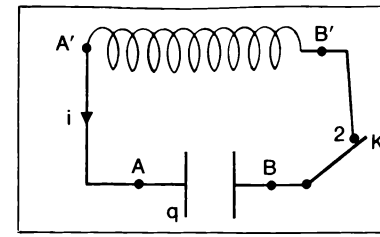
β) *Établir la relation* $u_{AB} = g(t)$ *donnant la tension aux bornes du condensateur en fonction du temps et la relation* i = h(t) *donnant l'intensité du courant dans ce circuit en fonction du temps.*

c) *Calculer, à la date* t, *les énergies emmagasinées par le condensateur et par la bobine. Que peut-on dire de leur somme?*

(D'après bac)

S 24. *a)* A l'intérieur du solénoïde, le champ magnétique propre $\overrightarrow{B_0}$ créé par le solénoïde est uniforme : $\overrightarrow{B_0}$ est parallèle à l'axe du solénoïde, a son sens conditionné par celui du courant, a pour module $B_0 = \mu_0 \frac{N}{\ell} |i|$. Les spires, quasi planes, ont pour vecteur unitaire normal $\overrightarrow{u_N}$, parallèle à l'axe du solénoïde, de sens conditionné par celui du sens + (revoir ℳ 46). Supposons que i soit positif, alors $\overrightarrow{B_0}$ et $\overrightarrow{u_N}$ ont mêmes direction et sens. Le flux magnétique propre à travers le solénoïde est $\Phi_0 = N \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot \overrightarrow{u_N} \cdot \overrightarrow{B_0}$. D'où $\Phi_0 = N \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot \mu_0 \frac{N}{\ell} i$. Par définition, l'auto-inductance du solénoïde $L = \frac{\Phi_0}{i} = \frac{\pi \mu_0 N^2 D^2}{4\ell}$, numériquement $L = 1{,}97 \cdot 10^{-2}$ H.

b) α) • Présentation de la démarche : soit q la charge de l'armature A par où arrive le sens + choisi, l'intensité i mesurée algébriquement suivant ce sens + est liée à q par $i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$ (revoir ℳ 30); les points A et A′ appartiennent au même fil de résistance nulle, donc sont au même potentiel, de même B et B′ sont au même potentiel, par suite $u_{AB} = u_{A'B'}$; à partir de ces relations nous allons en déduire l'équation différentielle du circuit.



• Comme q désigne la charge de l'armature A, $q = C u_{AB}$, par suite $u_{AB} = \frac{q}{C}$.

• Le sens positif traverse le solénoïde de B′ vers A′, d'après la loi d'Ohm $u_{B'A'} = Ri + L\frac{di}{dt} = L\frac{di}{dt}$ puisque la résistance R du solénoïde est négligeable (revoir ℳ 61). Donc $u_{A'B'} = -u_{B'A'} = -L\frac{di}{dt}$.

• Comme $u_{AB} = u_{A'B'}$, $\frac{q}{C} = -L\frac{di}{dt}$.

Comme $i = \dot{q}$, on obtient $\frac{q}{C} = -L\ddot{q}$. Cette équation différentielle peut s'écrire $\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$. Elle est de la forme $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, cela signifie que q est fonction sinusoïdale du temps $q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ en désignant par Q_m l'amplitude de q, par ω_0 la pulsation propre du circuit oscillant librement, par φ la phase initiale.

• A partir de l'état électrique initial du circuit nous allons pouvoir déterminer Q_m et φ.

— D'après les expressions :

$$q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{et} \quad i = \dot{q} = -Q_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

à la date $t = 0$:

$$\begin{cases} q_0 = Q_m \cos \varphi \\ i_0 = -Q_m \omega_0 \sin \varphi. \end{cases}$$

— D'après l'expérience à la date $t = 0$, à l'instant où l'interrupteur K vient au contact de la borne 2, le courant a encore une intensité nulle ($i_0 = 0$), la charge de l'armature A est encore égale à $q_0 = C u_{AB} = C U_0$:

$$\begin{cases} q_0 = C U_0 = 5 \cdot 10^{-6}\ \text{C} \\ i_0 = 0. \end{cases}$$

— Par comparaison :

$$\begin{cases} Q_m \cos \varphi = 5 \cdot 10^{-6} & (1) \\ -Q_m \omega_0 \sin \varphi = 0 & (2) \end{cases}$$

Il suffit de déterminer un couple ($Q_m > 0$, φ) : d'après (2) on peut prendre $\varphi = 0$, en reportant dans (1) $Q_m = 5 \cdot 10^{-6}$ C.

• En résumé $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1{,}01 \cdot 10^4$ rad·s^{-1}, $Q_m = 5 \cdot 10^{-6}$ C, $\varphi = 0$, donc $q = 5 \cdot 10^{-6} \cos(1{,}01 \cdot 10^4\, t)$ en unités S.I.

β) A chaque instant $u_{AB} = \frac{q}{C} = 10 \cos(1{,}01 \cdot 10^4\, t)$ en unités S.I., $i = \dot{q} = -5 \cdot 10^{-6} \times 1{,}01 \cdot 10^4 \sin(1{,}01 \cdot 10^4\, t) = -5{,}05 \cdot 10^{-2} \sin(1{,}01 \cdot 10^4\, t)$ en unités S.I. (Cette dernière relation nous montre qu'il prend naissance dans le circuit, de résistance supposée nulle, un courant alternatif de pulsation ω_0, d'intensité efficace $I_0 = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 3{,}57 \cdot 10^{-2}$ A).

c) Comme $q = Q_m \cos \omega_0 t$ et $i = \dot{q} = -Q_m \omega_0 \sin \omega_0 t$, à la date t :
— l'énergie électrique $W_{él}$ emmagasinée dans le condensateur est (revoir ℳ 29).

$$W_{él} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C} \cos^2 \omega_0 t;$$

— l'énergie magnétique W_B emmagasinée dans la bobine est (revoir ℳ 62),

$$W_B = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} LQ_m^2 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t;$$

— l'énergie totale de l'oscillateur électrique $W = W_{él} + W_B$ est :

$$W = \frac{1}{2} Q_m^2 \left(\frac{1}{C} \cos^2 \omega_0 t + L\omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t\right).$$

Comme $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, $L\omega_0^2 = \frac{1}{C}$, par suite :

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C} (\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t) = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C}.$$

Cette énergie reste constante, elle est égale à l'énergie initialement apportée par le condensateur chargé.

ℳ 69 **Pulsation propre d'un circuit L, C de résistance négligeable.**

• Lorsqu'un condensateur chargé se décharge à travers une bobine d'auto-inductance L, de résistance négligeable, il apparaît un courant alternatif : le circuit (L, C) constitue un *oscillateur électrique*.

• La pulsation propre de ce circuit est :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

• Il est important de savoir redémontrer l'expression précédente en utilisant :
— soit les lois d'Ohm;

— soit la conservation de l'énergie totale de l'oscillateur.

• Si la résistance R du circuit n'est pas négligeable :

— les oscillations sont amorties si $R < R_C$, R_C est une résistance déterminée pour un circuit (L, C) donné, c'est la résistance critique du circuit (L, C);

— il n'y a plus d'oscillations si $R \geqslant R_C$, on dit aussi que la décharge est non oscillante ou que le régime est apériodique.

E 25. a) *On considère un générateur de courant idéal (de borne positive* P, *de borne négative* N) *qui débite un courant d'intensité indépendante du temps,* $I = 150\ \mu A$. *On charge avec ce générateur* PN *un condensateur* AB *de capacité* $C = 18\ \mu F$ *initialement déchargé (l'armature* A *est reliée à* P, B *à* N).

Calculer 8 secondes *après le début de la charge :*

— *les charges* q_A *et* q_B *de chaque armature;*

— *la différence de potentiel* $V_A - V_B$ *entre ses armatures;*

— *l'énergie* W_E *accumulée.*

b) *Le condensateur est alors isolé du générateur puis branché à l'instant origine des dates sur une bobine d'inductance* $L = 0{,}5$ H *et de résistance négligeable.*

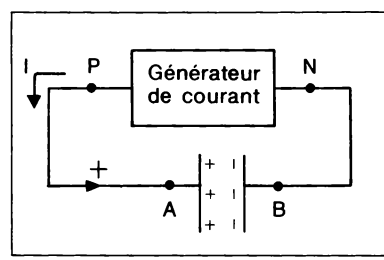
α) *On appellera* q(t) *la charge portée par l'armature* A *à l'instant* t. *Établir l'équation différentielle vérifiée par la charge* q(t) *lorsque l'interrupteur* S *est fermé. On proposera deux méthodes.*

β) *Calculer la période propre* T_0 *de l'oscillateur.*

γ) *A la date* $t = 1{,}5\,\pi\ 10^{-3}$ s, *calculer la tension* u_{AB}, *l'intensité* i *du courant et déterminer le sens du courant.*

(D'après bac)

S 25. *a)* • Choisissons le sens + dans le sens du courant débité par le générateur : l'intensité du courant étant constante, $i = +I$ quel que soit t.



• Appelons q_A la charge algébrique de l'armature A par où arrive le sens +.

• A chaque instant, $i = \dfrac{dq_A}{dt} = \dot{q}_A$ (revoir ℳ 30) donc $\dot{q}_A = I$.

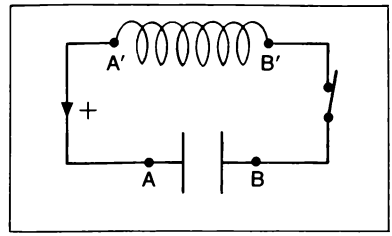
• On pose de $\dot{q}_A$ à q_A par intégration par rapport au temps, par suite $q_A = It + C^{te}$. La constante doit être prise égale à zéro puisqu'à la date $t = 0$, la charge q_A de l'armature A est nulle.

• En résumé $q_A = It$. Ainsi au bout de 8 s, $q_A = 150 \cdot 10^{-6} \times 8 = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ C. L'armature B porte alors la charge opposée $q_B = -1{,}2 \cdot 10^{-3}$ C.

• A tout instant $q_A = C(V_A - V_B)$, en particulier au bout de 8 s, $(V_A - V_B) = \dfrac{q_A}{C} = \dfrac{1{,}2 \cdot 10^{-3}}{18 \cdot 10^{-6}} = 66{,}7$ V.

• L'énergie électrique accumulée $W_E = \dfrac{1}{2} C (V_A - V_B)^2 = 4 \cdot 10^{-2}$ J.

b) α) • Présentation de la démarche : choisissons le sens + de façon que celui-ci arrive dans le condensateur par l'armature A portant la charge q(t), alors à tout instant $i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$; pour montrer que le circuit sans résistance est un oscillateur électrique harmonique on va établir l'équation différentielle à laquelle obéit q soit par des considérations électriques utilisant les lois d'Ohm, soit par des considérations énergétiques fondées sur la conservation de l'énergie de l'oscillateur.



• *Première méthode :* $u_{AB} = u_{A'B'}$, comme $u_{AB} = \frac{q}{C}$ et $u_{B'A'} = L\frac{di}{dt}$ (puisque le sens + traverse la bobine de B′ vers A′) on aboutit à $\frac{q}{C} = -L\frac{di}{dt}$, soit à $\frac{q}{C} = -L\ddot{q}$. Cette équation différentielle s'écrit $\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$. Elle montre que q est fonction sinusoïdale du temps, de pulsation $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 333\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, dont l'expression est $q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$.

• *Deuxième méthode :* soit W l'énergie totale du circuit, somme de l'énergie électrique W_E en réserve dans le condensateur et de l'énergie magnétique W_B en réserve dans la bobine; comme la résistance du circuit est négligeable : $W = W_E + W_B$ reste constante.

Comme $W_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ et $W_B = \frac{1}{2}Li^2$, il s'ensuit :

$$\frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2 = W = C^{te}.$$

Dérivons les deux membres de cette égalité par rapport au temps en remarquant que q^2 est une fonction du temps dont la dérivée est $2q\dot{q}$, que i^2 est une fonction du temps dont la dérivée est $2i\dot{i} = 2\dot{q}\ddot{q}$.

On obtient $\frac{q\dot{q}}{C} + L\dot{q}\ddot{q} = 0$, soit $\dot{q}\left(\frac{q}{C} + L\ddot{q}\right) = 0$.

Cette égalité doit être vérifiée quel que soit $\dot{q}$, par suite $\ddot{q} + \frac{q}{LC} = 0$, on retrouve l'équation différentielle précédente.

• *Détermination de l'amplitude et de la phase initiale.*
Considérons l'état électrique initial du circuit :
— d'après les expressions $q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ et $i = -Q_m\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$, à la date $t = 0$

$$\begin{cases} q_0 = Q_m \cos\varphi \\ i_0 = -Q_m\omega_0 \sin\varphi; \end{cases}$$

— d'après les données de l'énoncé, à la date $t = 0$, la décharge oscillante commence : $i_0 = 0$, l'armature A a encore sa charge calculée au *a*) :
$q_0 = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ C;

— par comparaison, on en déduit :

$$\begin{cases} q_m \cos \varphi = 1{,}2 \cdot 10^{-3} & (1) \\ -Q_m \omega_0 \sin \varphi = 0. & (2) \end{cases}$$

Il suffit de déterminer un couple (φ; $Q_m > 0$), d'après (2) on peut prendre $\varphi = 0$, d'après (1) en reportant $\varphi = 0$ on en déduit $Q_m = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ C;
— l'expression de q est donc $q = 1{,}2 \cdot 10^{-3} \cos 333\,t$.

β) • La période propre de l'oscillateur électrique en régime d'oscillations libres est :

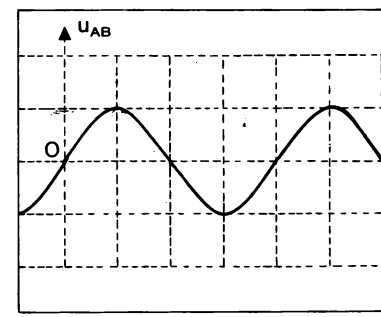
$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{LC} = 1{,}88 \cdot 10^{-2} \text{ s.}$$

γ) • $u_{AB} = \dfrac{q}{C} = \dfrac{1{,}2 \cdot 10^{-3}}{18 \cdot 10^{-6}} \cos 333\,t = 66{,}7 \cos 333\,t.$

A la date $t = 1{,}5\pi \cdot 10^{-3}$ s, $u_{AB} = 66{,}7 \cos 0{,}5\pi = 0$.

• $i = \dot{q} = -1{,}2 \cdot 10^{-3} \times 333 \sin 333\,t = -0{,}4 \sin 333\,t$.
A la date $t = 1{,}5\,\pi \cdot 10^{-3}$ s, $i = -0{,}4 \sin 0{,}5\,\pi = -0{,}4$ A. Remarquons qu'à cette date i est négatif : le courant a le sens négatif.

E 26. *Un circuit comprend un condensateur* AB *de capacité* $C = 1\ \mu F$ *et une bobine d'auto-inductance* L. *La résistance du circuit est négligeable. On enregistre grâce à un oscillographe les variations de la tension* u_{AB} *en fonction du temps lors de la décharge oscillante du condensateur dans la bobine.*
La sensibilité verticale est 2 V/*division, la base de temps est* 0,1 ms/division.



Une partie de l'oscillogramme est reproduite ci-contre.

a) *Quelle est la période propre* T_0 *du circuit oscillant* (L, C)?

b) *Quelle est l'auto-inductance de la bobine?*
c) *Quelle est l'énergie totale en réserve dans l'oscillateur?*
En déduire l'intensité maximale du courant et la valeur de cette intensité lorsque $u_{AB} = 1$ V.

S 26. *a*) Une oscillation s'étale horizontalement suivant 4 divisions :

$$T_0 = 4 \text{ divis} \times 0{,}1 \text{ ms/divis} = 0{,}4 \text{ ms} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ s.}$$

b) Lorsqu'un condensateur se décharge à travers une bobine, la résistance du circuit étant négligeable, il apparaît un courant alternatif de pulsation $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ (la démonstration n'est pas explicitement demandée, on peut utiliser l'expression de $\mathcal{M}$ 69).

Par suite $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{LC}$, d'où $L = \dfrac{T_0^2}{4\pi^2 C} = 4{,}05 \cdot 10^{-3}$ H.

c) • A la date t :
— la charge de l'armature A est q_A;
— l'intensité du courant mesurée suivant le sens + arrivant au condensateur par A est $i = \dot{q}_A$;
— l'énergie électrique en réserve dans le condensateur est $W_E = \frac{1}{2} Cu_{AB}^2$;
— l'énergie magnétique en réserve dans la bobine est $W_B = \frac{1}{2} Li^2$;
— l'énergie totale en réserve dans le circuit (L, C) est $W = W_E + W_B$.

• Puisque la résistance du circuit est négligeable, l'énergie totale :
$W = \frac{1}{2} Cu_{AB}^2 + \frac{1}{2} Li^2$ reste constante.

Pour évaluer W, considérons un instant où u_{AB} est maximum, égal à 2 V. A cet instant $q_A = Cu_{AB}$ est aussi maximal, par suite la dérivée de q_A par rapport au temps $i = \dot{q}_A$ est nulle.

Donc $$W = \frac{1}{2} \cdot 10^{-6} \times 2^2 + 0 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ J} = 2 \text{ µJ}.$$

• L'intensité i est maximale, égale à I_m, lorsque l'énergie magnétique W_B est maximale. Cette dernière est maximale lorsque l'énergie électrique W_E est nulle, c'est-à-dire aux instants tels que $u_{AB} = 0$.

Par suite, à ces instants, $W = \frac{1}{2} LI_m^2$, d'où :

$$I_m = \sqrt{\frac{2W}{L}} = \sqrt{\frac{2 \times 2 \cdot 10^{-6}}{4{,}05 \cdot 10^{-3}}} = 3{,}14 \cdot 10^{-2} \text{ A}.$$

• Lorsque $u_{AB} = 1$ V, i prend la valeur telle que :

$$\frac{1}{2} Li^2 = W - \frac{1}{2} Cu_{AB}^2$$

d'où $$i^2 = \frac{2W - Cu_{AB}^2}{L}.$$

Comme i peut être positif ou négatif : $i = \pm \sqrt{\frac{2W - Cu_{AB}^2}{L}} = \pm 2{,}72 \cdot 10^{-2}$ A.

E 27. a) *On considère un solide* A, *de masse* m *pouvant glisser sans frottement sur une glissière horizontale. On accroche à ce solide une extrémité d'un ressort de masse négligeable et de raideur* k, *l'autre extrémité étant reliée à un point fixe. On déplace horizontalement le solide* A *de façon à provoquer l'allongement du ressort et on l'abandonne sans vitesse initiale. Il apparaît des oscillations mécaniques.*

α) *Établir l'équation différentielle du mouvement du solide* A *en prenant comme variable l'élongation* x *du solide* A.

β) *En déduire la période des oscillations. Application numérique* $m = 0{,}5$ kg *et* $k = 25$ N·m^{-1}.

b) *On réalise un circuit ouvert comprenant une bobine de résistance négligeable, d'inductance* L *et un condensateur chargé de capacité* C. *On ferme le circuit.*

α) *Établir l'équation différentielle traduisant les oscillations électriques qui apparaissent dans le circuit en prenant comme variable la charge* q *d'une armature du condensateur.*

β) *En déduire la période des oscillations. Application numérique :* $L = 0{,}1$ H *et* $C = 10^{-5}$ F.

c) *Faire apparaître dans un tableau récapitulatif les analogies électriques et mécaniques en citant les grandeurs électriques de la question* b) *qui correspondent aux grandeurs mécaniques suivantes (question* a)) : *masse* m, *raideur* k, *élongation* x *du solide* A, *vitesse* $\bar{v}$ *du solide* A, *énergie cinétique et énergie potentielle du système solide* A-*ressort.*

(D'après bac)

S 27. *a*) α) (Nous ne donnons que des indications et la réponse, revoir éventuellement E 5.) En appliquant le théorème du centre d'inertie au solide A ou bien en exploitant le fait que l'énergie mécanique du système (ressort-A) se conserve, on aboutira à $\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$.

β) L'équation différentielle permet d'affirmer que l'oscillateur mécanique (ressort, A) est harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, de période propre $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 0{,}888$ s.

b) α) Nous ne donnons que la réponse, (revoir éventuellement E 25 *b*)). On aboutira à $\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$.

β) L'équation différentielle permet d'affirmer que l'oscillateur électrique (L, C) est harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, de période propre $T_0 = 2\pi \sqrt{LC} = 6{,}28 \cdot 10^{-3}$ s.

c) Dans le tableau suivant figurent les analogies, nous n'avons pas répondu dans l'ordre proposé par l'énoncé afin d'expliquer comment on peut déterminer ces analogies.

	Oscillateur mécanique	Oscillateur électrique
1	$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$	$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$
2	$\bar{v} = \dot{x}$	$i = \dot{q}$
3	x	q
4	$\bar{v}$	i

5	$E_p = \frac{1}{2} kx^2$	$W_E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$
6	k	$\frac{1}{C}$
7	$E_C = \frac{1}{2} m \bar{v}^2$	$W_B = \frac{1}{2} Li^2$
8	m	L

Au regard de la ligne 1 il serait tentant de dire que x correspond à q, mais l'équation différentielle du circuit pourrait aussi s'écrire avec la variable intensité $\ddot{i} + \frac{1}{LC} i = 0$ ou avec la variable tension $\ddot{u} + \frac{1}{LC} u = 0$.

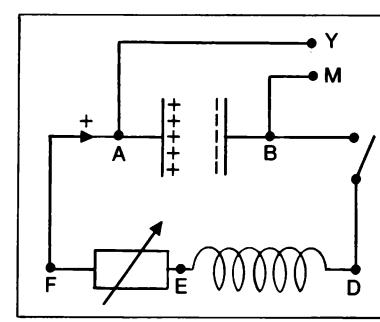
A la relation $\bar{v} = \dot{x}$ (ligne 2) correspond une seule relation de même type $i = \dot{q}$, on peut donc affirmer que $\bar{v}$ correspond à i et x à q.

A l'énergie potentielle élastique E_p faisant intervenir x correspond l'énergie électrique W_E qui fait intervenir q (ligne 5), par suite à la constante de raideur k correspond l'inverse de la capacité, $\frac{1}{C}$.

A l'énergie cinétique E_C faisant intervenir $\bar{v}$ correspond l'énergie magnétique W_B qui fait intervenir i (ligne 7), par suite à la masse m correspond l'auto-inductance L.

On vérifie bien ainsi qu'à $\frac{k}{m}$ correspond $\frac{1}{LC}$ (ligne 1).

E 28. *Un circuit est constitué par un condensateur de capacité* $C = 5\ \mu F$, *une bobine d'auto-inductance* $L = 0{,}2$ H *et la résistance négligeable, un rhéostat de résistance* R *variable, un interrupteur.*
Un oscillographe, utilisé avec son balayage interne, permet de visualiser les variations de u_{AB} *en fonction du temps.*
Le condensateur étant initialement chargé, on abaisse l'interrupteur.



a) *Établir l'équation différentielle à laquelle obéit la charge* q *de l'armature* A. *Pour quelle valeur de* R *cette équation admet-elle une solution* q *fonction sinusoïdale du temps? Préciser alors la période de cette fonction.*

b) *Représenter sur trois schémas distincts l'allure de la courbe observée sur l'écran de l'oscillographe lorsque* R *est nul, lorsque* R *est faible, lorsque* R *est très grand.*

c) *Soit* W *la somme de l'énergie électrique* W_E, *en réserve dans le condensateur a la date* t, *et de l'énergie magnétique* W_B, *en réserve dans la bobine à la même date.*

α) *Évaluer* $\frac{dW}{dt}$ *en fonction de* q *et de sa dérivée seconde par rapport au temps.*

β) *A partir de l'équation différentielle du* a), *montrer que* $\frac{dW}{dt} = -R\dot{q}^2 = -Ri^2$. *Conclure.*

S 28. *a*) • Le sens + arrive au condensateur AB par l'armature A : à chaque instant $i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$, q désignant la charge de A.

— En suivant le sens +, on peut écrire $u_{AB} + u_{BD} + u_{DE} + u_{EF} + u_{FA} = 0$.

— D'une part $u_{BD} = 0$ et $u_{FA} = 0$ car les fils de jonction et l'interrupteur sont supposés de résistance nulle.

— D'après la définition de la capacité C de condensateur, $q = Cu_{AB}$, donc $u_{AB} = \frac{q}{C}$.

— D'après la loi d'Ohm aux bornes de la bobine de résistance nulle $u_{DE} = \frac{L di}{dt}$.

— D'après la loi d'Ohm aux bornes du rhéostat $u_{EF} = Ri$.

— Par suite $$\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} + Ri = 0$$

soit $$\frac{q}{C} + L\ddot{q} + R\dot{q} = 0 \qquad (1)$$

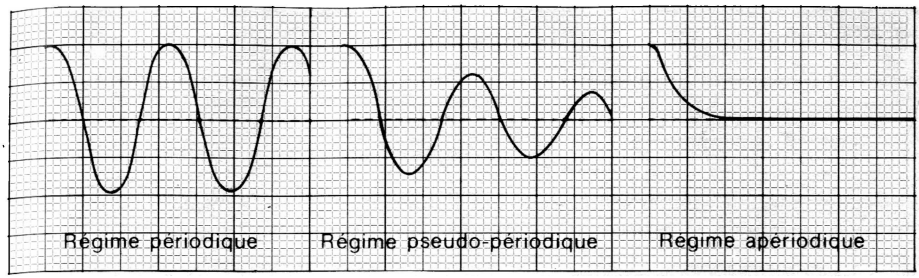
ou $$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q + \frac{R}{L}\dot{q} = 0. \qquad (2)$$

• Si q est une fonction sinusoïdale du temps $q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$, alors $\dot{q} = -Q_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$ et $\ddot{q} = -Q_m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 q$.

L'équation différentielle (2) doit alors pouvoir se mettre sous la forme $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$, ceci n'est possible qu'en posant $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $\frac{R}{L} = 0$, donc pour la valeur $R = 0$.

En résumé dans le cas où $R = 0$, q est une fonction sinusoïdale du temps de pulsation $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC} = 6{,}28 \cdot 10^{-3}$ s (le circuit est alors un oscillateur électrique harmonique).

b)



— Lorsque $R = 0$, le régime est périodique sinusoïdal, la tension u_{AB} partant de sa valeur maximale U_m oscille entre $+U_m$ et $-U_m$ à la période $T_0 = 6{,}28 \cdot 10^{-3}$ s.

— Lorsque R est faible, la courbe représentant u_{AB} en fonction du temps s'amortit, la décharge reste oscillante mais n'est plus périodique : on dit qu'elle est pseudo-périodique, sa pseudo-période T est voisine de T_0.

— Lorsque R atteint ou dépasse la résistance critique du circuit, il n'y a plus de décharge oscillante, u_{AB} décroît progressivement de U_m à zéro : le régime est apériodique.

c) $\alpha)$ $W = W_E + W_B = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2$.

La dérivée de q^2 par rapport au temps est $2q\dot{q}$, celle de i^2 est $2i\dot{i} = 2\dot{q}\ddot{q}$, d'où :

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{C}q\dot{q} + L\dot{q}\ddot{q} = \dot{q}\left(\frac{q}{C} + L\ddot{q}\right). \qquad (3)$$

c) • D'après l'équation différentielle (1) $\frac{q}{C} + L\ddot{q} = -R\dot{q}$.

Reportons dans (3) :

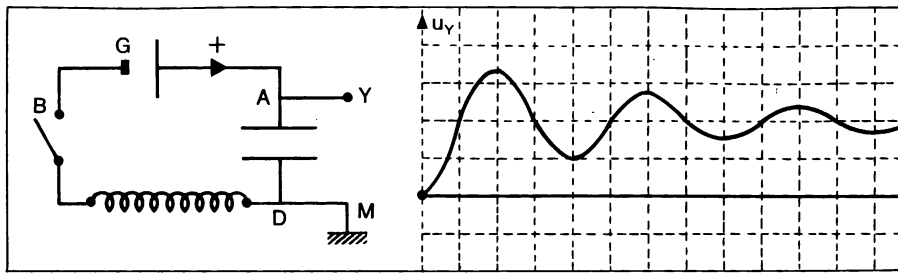
$$\frac{dW}{dt} = \dot{q}(-R\dot{q}) = -R\dot{q}^2 = -Ri^2.$$

Lorsque i varie, $-Ri^2$ est négatif (ou nul aux instants où i s'annule), $\frac{dW}{dt}$ est donc négatif (ou nul aux instants où i s'annule) : W diminue.

On trouve ainsi que l'énergie W se dissipe progressivement par effet Joule ($-Ri^2$ représente la puissance qui se transfère sous forme de chaleur).

E 29. *Soit le circuit schématisé ci-après, il comprend :*
— une source de tension continue G *maintenant entre ses bornes une différence de potentiel constante* $V_A - V_B = E$;
— un condensateur de capacité $C = 10\ \mu F$ *dont les bornes* A *et* D *sont reliées respectivement à l'entrée* Y *et à la masse* M *d'un oscillographe utilisé avec son balayage interne, ce condensateur est initialement neutre*;

— *une bobine* DB *de résistance* R, *d'auto-inductance* L;
— *un interrupteur.*
A la date t = 0, *on abaisse l'interrupteur, on obtient l'oscillogramme représenté ci-dessous.*



a) *Écrire l'équation différentielle du circuit, la grandeur caractéristique étant la charge* q *de l'armature* A.

b) *En faisant le changement de variable* $Q = q - CE$ *et en supposant* R *négligeable, exploiter l'équation différentielle précédente. En déduire l'expression qu'aurait alors* q *en fonction du temps et* $u_Y = V_A - V_D$ *en fonction du temps.*

c) *La courbe obtenue provient du fait qu'il y a amortissement des oscillations,* R *n'étant pas négligeable. Interpréter l'allure de la courbe. En déduire la valeur de* E, *la charge finale de l'armature* A, *la valeur approchée de* L.

Données :
la sensibilité verticale de la voie Y *est* $1\ V \cdot div^{-1}$;
la base de temps est $1\ ms \cdot div^{-1}$;
le trait horizontal sur l'écran correspond à $u_Y = 0$.

S 29. *a)* $V_A - V_B = (V_A - V_D) + (V_D - V_B)$.
Aux bornes du condensateur, q désignant la charge de A : $q = C(V_A - V_D)$, donc $(V_A - V_D) = \frac{q}{C}$.

Aux bornes de la bobine, le sens + allant de D vers B : $(V_D - V_B) = Ri + L\frac{di}{dt}$.

Par suite $E = \frac{q}{C} + Ri + L\frac{di}{dt}$.

Comme $i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$, cette équation s'écrit : $E = \frac{q}{C} + R\dot{q} + L\ddot{q}$ (1).

b) • Si R est négligeable, l'équation différentielle (1) devient $E = \frac{q}{C} + L\ddot{q}$ (2).
Posons $Q = q - CE$, en dérivant deux fois par rapport au temps : $\ddot{Q} = \ddot{q}$.
L'équation simplifiée (2) s'écrit alors $E = \frac{Q + CE}{C} + L\ddot{Q}$ soit $\ddot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0$ (3).
Cette équation différentielle admet une solution de la forme :
$Q = Q_m \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC}}\,t + \varphi\right)$.

• Revenons à $q = Q + CE = Q_m \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC}}\, t + \varphi\right) + CE$.

L'intensité $i = \dot{q} = -Q_m \sqrt{\frac{1}{LC}} \sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC}}\, t + \varphi\right)$.

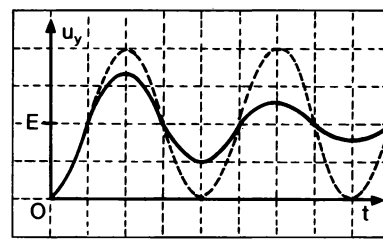
• A la date $t = 0$ $\left|\begin{array}{l} q_0 = Q_m \cos\varphi + CE = 0 \\ i_0 = -Q_m \sqrt{\frac{1}{LC}} \sin\varphi = 0 \end{array}\right.$

(puisqu'à cette date le courant est encore nul et le condensateur encore neutre).
On peut prendre $\varphi = 0$ pour satisfaire la deuxième condition, en reportant dans la première on en déduit $Q_m + CE = 0$ d'où $Q_m = -CE$.

En résumé : $q = -CE \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC}}\, t\right) + CE = CE\left(1 - \cos\sqrt{\frac{1}{LC}}\, t\right)$.

• $u_y = (V_A - V_D) = \frac{q}{C} = E\left(1 - \cos\sqrt{\frac{1}{LC}}\, t\right)$ (4).

c) • *Interprétation de la courbe.*



— Si la résistance R était négligeable, u_y (d'après (4)) serait une fonction sinusoïdale du temps de période $T = 2\pi\sqrt{LC}$, d'amplitude E, oscillant autour de la valeur moyenne E, nulle à la date $t = 0$ (cette courbe est représentée en pointillés ci-contre).

— La résistance n'étant pas négligeable, l'amplitude de u_y s'affaiblit en tendant vers zéro : la courbe pseudo-périodique tend vers la droite $u_y = E$.

Lorsque la limite $u_y = E$ est atteinte, alors la charge $q = C\ u_y = CE$ devient constante et l'intensité du courant $i = \dot{q}$ devient nulle : la charge oscillante est terminée.

• *Détermination des valeurs* E, charge finale de A et L.

Réponses :
$E = 2\ \text{div} \times 1\ \text{V} \cdot \text{div}^{-1} = 2\ \text{V}$.
La charge maximale $q = CE = 2 \cdot 10^{-5}\ \text{C}$.
$T = 4\ \text{div} \times 1\ \text{ms} \cdot \text{div}^{-1} = 4\ \text{ms}$, d'où $2\pi\sqrt{LC} \simeq 4 \cdot 10^{-3}\ \text{s}$ et $L \simeq 4{,}05 \cdot 10^{-2}\ \text{H}$.

POURQUOI ?

Pouvez-vous récapituler dans quels cas la décharge d'un condensateur est-elle oscillante?

• Ne sont pas oscillantes (c'est-à-dire qu'alors le courant garde un sens constant), les décharges d'un condensateur :
— dans un résistor;
— dans un autre condensateur;
— dans une bobine inductive de grande résistance (supérieure à la résistance critique du circuit condensateur-bobine).

• Seule la décharge d'un condensateur dans une bobine inductive de résistance négligeable ou faible est oscillante.

Pourquoi dit-on que les oscillations qui prennent naissance lorsqu'un condensateur se décharge dans une bobine de faible résistance sont libres?

On dit que les oscillations du circuit (L, C) sont libres car elles prennent naissance spontanément lors de la décharge du condensateur dans la bobine. Nous verrons dans le prochain chapitre qu'un générateur de courant alternatif de fréquence N pourra exciter le circuit (L, C) et imposer des oscillations de fréquence N qu'on appellera des oscillations forcées.

Dans le tableau de correspondance de S 27, *quelle grandeur électrique correspond à une force* F *agissant sur l'oscillateur mécanique?*

Partons de la relation $F = m\bar{a} = m\dot{\bar{v}}$. D'après le tableau au produit $m\dot{\bar{v}}$ correspond $L\frac{di}{dt}$, nous savons que $L\frac{di}{dt}$ est une tension électrique U, par suite à la force F correspond une tension électrique U.
On peut continuer la correspondance, à la force de frottement mécanique proportionnelle à la vitesse $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$ (λ coefficient positif) correspond $U = Ri$ (R, résistance du circuit, est l'homologue de λ).

De quoi dépend la résistance critique?

Pour vous il est suffisant de savoir que pour un circuit (L, C) donné, il existe une résistance bien déterminée dite résistance critique R_C telle que si $R \geqslant R_C$ il n'y a plus de décharge oscillante.
(Si vous voulez des informations supplémentaires, sachez qu'à partir de l'équation différentielle établie dans S 28 *a*), on montre que $R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, ainsi pour le circuit de S 28 $R_C = 400\ \Omega$.)

3 OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES FORCÉES

E 30. *(Exercice pour se familiariser avec les vecteurs de Fresnel.)*
Un circuit électrique alimenté par un générateur de tension alternative sinusoïdale G *est parcouru par un courant d'intensité* $i = 3\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$ *(en unités S.I.).*

La tension aux bornes de G *est* $u = 25\cos 100\pi t$ *(en unités S.I.).*

a) *Préciser l'intensité maximale, l'intensité efficace, la tension maximale aux bornes de* G, *la tension efficace aux bornes de* G, *les fréquences de* i *et* u.

b) *Représenter, au même instant, les vecteurs de Fresnel* $\vec{u}$ *et* $\vec{i}$ *associés à* u *et* i. *Préciser le déphasage* φ *de* u *par rapport à* i. *Quelle est la fonction en avance?*

c) *En vous aidant des vecteurs de Fresnel, tracer les deux courbes représentant les variations de* u *et* i *en fonction du temps pour* $t \geqslant 0$. *Que représente le retard temporel* τ?

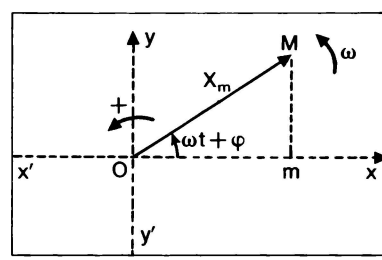
d) *Est-ce que le vecteur* $\vec{i} + \vec{u}$ *représente une grandeur intéressante?*

70 Vecteur de Fresnel associé à une fonction sinusoïdale.

• Soit $x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ une fonction sinusoïdale (avec $X_m > 0$, $\omega > 0$ et $-\pi < \varphi \leqslant \pi$).

• Soit un plan P muni d'un repère (x'Ox, y'Oy), x'Ox s'appelle l'axe origine des phases.

• A la fonction $x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$, on associe un vecteur de Fresnel $\overrightarrow{OM}$:



— de module X_m;

— tournant autour de O à la vitesse angulaire ω égale à la pulsation de x;

— faisant, à la date t, avec l'axe origine des phases, l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = (\omega t + \varphi)$.

• La coordonnée $\overline{Om}$ de $\overrightarrow{OM}$ sur x'x représente à chaque instant x.

• *Remarques :*

— le sens + sera toujours le sens direct;

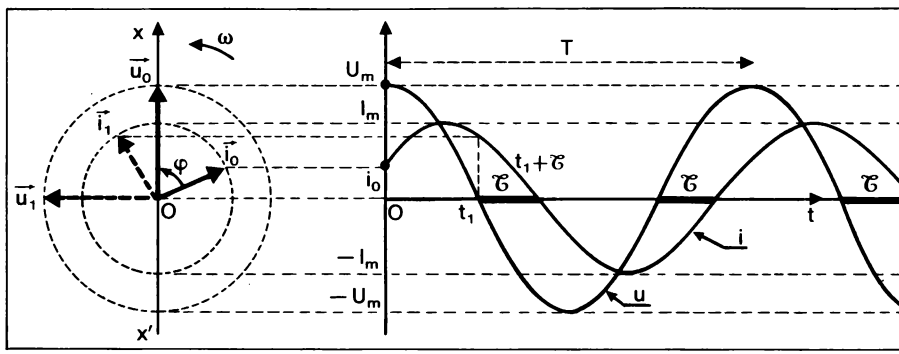
— comme $\omega > 0$, les vecteurs de Fresnel tourneront tous dans le sens +;

— si x était exprimé sous la forme $x = X_m \sin(\omega t + \varphi)$, ce serait la coordonnée sur y'y qui représenterait x.

S 30. *a*) L'intensité prend sa valeur maximale I_m aux instants tels que $\cos\left(100\,\pi t - \frac{\pi}{3}\right) = 1$, donc $I_m = 3$ A. Par définition l'intensité efficace $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 2{,}12$ A.

La tension maximale $U_m = 25$ V, la tension efficace $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 17{,}7$ V.

Les deux fonctions i et u ont la même pulsation $\omega = 100\,\pi$ rad·s^{-1}, donc la même fréquence $N = \frac{\omega}{2\pi} = 50$ Hz : elles sont synchrones.



b) • Représentons les deux vecteurs de Fresnel à la date $t = 0$:
— le vecteur $\vec{u}$ a pour position $\vec{u_0}$, de norme $U_m = 25$ V, faisant avec l'axe origine des phases x'x un angle nul;
— le vecteur $\vec{i}$ a pour position $\vec{i_0}$, de norme $I_m = 3$ A, faisant avec l'axe origine des phases x'x un angle $(\overrightarrow{x'x}, \vec{i_0}) = -\frac{\pi}{3}$ rad.

Remarque. L'axe origine des phases x'x a été placé verticalement pour faciliter le tracé des courbes de la question *c*).

• Les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{i}$ tournent à la même vitesse angulaire ω, l'angle $(\vec{i}, \vec{u})$ reste constant. On considère toujours l'angle orienté de plus faible valeur absolue qui fait passer de $\vec{i}$ à $\vec{u}$, dans cette expérience $(\vec{i}, \vec{u}) = +\frac{\pi}{3}$ rad.

Le déphasage de u par rapport à i est :

$$\varphi = \text{phase de u} - \text{phase de i}$$
$$= (100\,\pi t) - \left(100\,\pi t - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}\text{ rad} = (\vec{i}, \vec{u}).$$

• L'angle $(\vec{i}, \vec{u})$, le plus faible en valeur absolue, est ici positif : u est en avance sur i.

c) • A chaque instant u est égal à la coordonnée de $\vec{u}$ sur x'x. Ainsi à $t = 0$, $\vec{u}$ a la position $\vec{u_0}$, sa coordonnée $u_0 = U_m = 25$ V. A la date $t_1 = \frac{T}{4}$ (T période de u

représente le temps mis par $\vec{u}$ pour faire un tour), $\vec{u}$ a la position $\vec{u_1}$, sa coordonnée $u_1 = 0$. On peut ainsi s'aider du vecteur de Fresnel $\vec{u}$ pour tracer la courbe $u = 25 \cos 100\pi t$.

• De même, à chaque instant, i est égal à la coordonnée de $\vec{I}$ sur x'x. Ainsi on relève graphiquement la coordonnée i_0 de $\vec{i_0}$ que l'on reporte dans le système d'axe (Ot, Oi).

• Le vecteur $\vec{I}$ suit le vecteur $\vec{u}$ avec un retard temporel $\mathcal{C} = \frac{\varphi}{\omega}$, égal à l'intervalle de temps nécessaire pour que $\vec{I}$ balaye l'angle φ. Ainsi il faut attendre la date $t_1 + \mathcal{C}$ pour que i s'annule pour la première fois après $t = 0$. Suivant l'axe des temps, la courbe représentant la fonction i en retard est décalée vers la droite de $\mathcal{C}$ (là encore c'est le plus petit décalage qu'il convient de considérer).

Numériquement pour cette expérience $\mathcal{C} = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{\varphi}{2\pi} \times T = \frac{\pi}{6\pi} \times T = \frac{T}{6}$.

d) Cela n'a évidemment pas de sens d'ajouter une intensité et une tension : c'est une erreur grave à ne pas faire.

71 Déphasage entre deux fonctions sinusoïdales synchrones

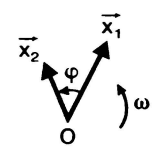
• Soit $x_1 = X_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $x_2 = X_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$: ces deux fonctions sinusoïdales ont même pulsation, elles sont synchrones.

• Le déphasage de x_2 par rapport à x_1 est la différence (phase de x_2 − phase de x_1) $= \varphi_2 - \varphi_1$. On peut toujours (en ajoutant ou retranchant 2π) ramener ce déphasage à un angle φ, compris entre $-\pi$ et $+\pi$. Cet angle φ représente l'angle orienté le plus faible en valeur absolue que font entre eux les vecteurs de Fresnel associés $\vec{x_1}$ et $\vec{x_2}$:

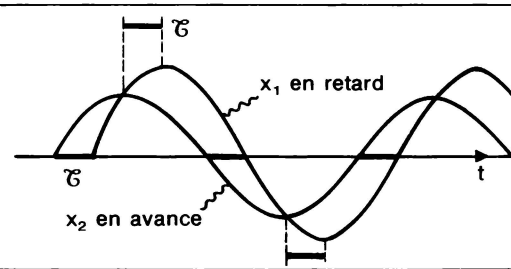
φ = déphasage de x_2 par rapport à x_1 = $(\vec{x_1}, \vec{x_2})$.

• Si $\varphi > 0$, x_2 est en avance sur x_1; si $\varphi < 0$, x_2 est en retard sur x_1.

• Les deux courbes représentant les variations de x_1 et x_2 par rapport au temps sont des sinusoïdes d'amplitudes différentes, déphasées : le décalage minimum mesuré suivant l'axe des temps est l'écart temporel $\mathcal{C}$.



x_2 est en avance sur x_1 : $\varphi > 0$

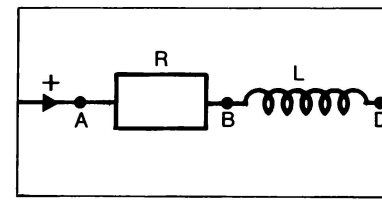


• L'écart temporel $\mathcal{T}$ représente la durée nécessaire pour que le vecteur $\overrightarrow{x_1}$ (en retard dans le cas de notre figure) tourne de $|\varphi|$:

$$\mathcal{T} = \frac{|\varphi|}{\omega}.$$

• Il faut connaître trois déphasages simples :
— si $\varphi = 0$: x_1 et x_2 sont en concordance de phase;
— si $|\varphi| = \frac{\pi}{2}$: x_1 et x_2 sont en quadrature de phase;
— si $\varphi = \pm\pi$: x_1 et x_2 sont en opposition de phase.

E 31. *Un dipôle* AD *est constitué par un résistor* AB *de résistance* $R = 15\,\Omega$ *et une bobine* BD *d'auto-inductance* $L = 5 \cdot 10^{-2}$ H *et de résistance négligeable.*
Le dipôle est parcouru par un courant alternatif sinusoïdal $i = I_m \cos \omega t$ *avec* $I = 2$ A *et* $\omega = 200$ rad·s^{-1}.



a) *Donner les expressions de* u_{AB} *et* u_{BD} *en fonction de* t.

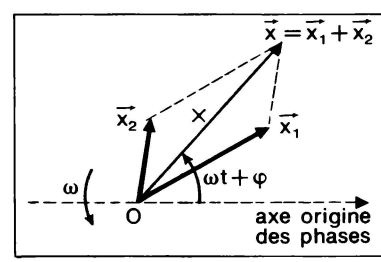
b) *Indiquer comment construire les vecteurs de Fresnel* $\overrightarrow{u_{AB}}$ *et* $\overrightarrow{u_{BD}}$ *à partir du vecteur de Fresnel* $\vec{I}$.

c) *Construire le vecteur de Fresnel* $\overrightarrow{u_{AD}}$, *que peut-on dire relativement à la fonction* $u_{AD} = f(t)$?

72 **Somme de deux fonctions sinusoïdales synchrones.**

• Soit $x_1 = X_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $x_2 = X_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ deux grandeurs sinusoïdales de même nature, de même fréquence.
Pour déterminer les caractéristiques de $x = x_1 + x_2$, on peut utiliser les vecteurs de Fresnel $\overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{x_2}$ associés à x_1 et x_2 : le vecteur $\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}$ représente alors la somme $x = x_1 + x_2$.

• Les deux vecteurs $\overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{x_2}$ tournent à la même vitesse ω, le parallélogramme ne se déforme pas au cours de la rotation, par suite :
— le vecteur $\vec{x} = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}$ tourne à la vitesse angulaire ω;
— le vecteur $\vec{x}$ garde un module constant X.
Le vecteur $\vec{x}$ représente donc une fonction sinusoïdale $x = X \cos(\omega t + \varphi)$.



Remarques :
— nous verrons que X et φ peuvent s'évaluer en fonction de X_1, X_2, φ_1 et φ_2;
— il est nécessaire d'utiliser la même fonction trigonométrique pour caractériser x_1, x_2, x (soit le cosinus pour les trois, soit le sinus pour les trois); de cette manière x_1, x_2, x représentent les coordonnées de $\vec{x_1}$, $\vec{x_2}$, $\vec{x}$ suivant le même axe.

S 31. *a)* • $u_{AB} = Ri = RI_m \cos \omega t$. Numériquement, en remarquant que $I_m = I\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ A, $u_{AB} = 30\sqrt{2} \cos 200t$ (en unités S.I.).

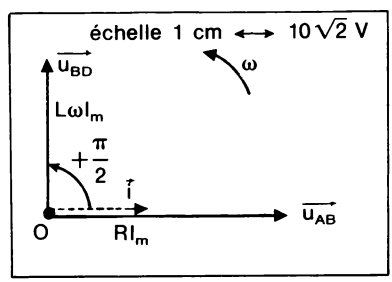
• $u_{BD} = L\dfrac{di}{dt} = -L\omega I_m \sin \omega t$. D'après la deuxième remarque de $\mathcal{M}$ 72, il est utile d'exprimer u_{BD} à l'aide de la fonction cosinus (fonction déjà utilisée pour i et u_{AB}).

En remarquant que $\cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin \omega t$,

u_{BD} s'écrit $u_{BD} = L\omega I_m \cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Numériquement, en unités S.I., $u_{BD} = 20\sqrt{2} \cos\left(200t + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

b) • u_{AB} est en phase avec i (leur phase est ωt), les deux vecteurs de Fresnel $\overrightarrow{u_{AB}}$ et $\vec{I}$ sont de même direction et sens. Le module de $\overrightarrow{u_{AB}}$ est RI_m, celui de $\vec{I}$ est I_m. On passe donc de $\vec{I}$ à $\overrightarrow{u_{AB}}$ en multipliant le vecteur $\vec{I}$ par R.



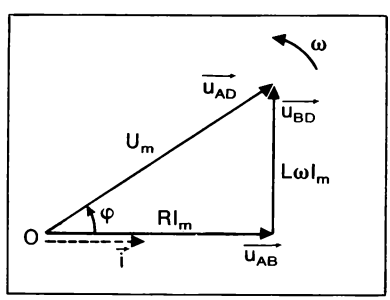
• $u_{BD} = L\omega I_m \cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ est en quadrature avance sur $i = I_m \cos \omega t$: l'angle $(\vec{I}, \overrightarrow{u_{BD}}) = +\dfrac{\pi}{2}$ rad.

De plus le module de $\overrightarrow{u_{BD}}$ est $L\omega$ fois celui de $\vec{I}$. On passe donc de $\vec{I}$ à $\overrightarrow{u_{BD}}$ en effectuant une rotation de $+\dfrac{\pi}{2}$ rad et en multipliant le module par $L\omega$.

c) • D'après la loi des tensions, à chaque instant, $u_{AD} = u_{AB} + u_{BD}$. Le vecteur de Fresnel associé à u_{AD} est $\overrightarrow{u_{AD}} = \overrightarrow{u_{AB}} + \overrightarrow{u_{BD}}$.

Très souvent on construit un représentant de $\overrightarrow{u_{BD}}$ à partir de l'extrémité de $\overrightarrow{u_{AB}}$ pour obtenir ainsi $\overrightarrow{u_{AD}}$.

Le vecteur $\overrightarrow{u_{AD}}$ tourne à la vitesse angulaire $\omega = 200$ rad·s^{-1}, son module U_m reste constant, donc u_{AD} est une fonction sinusoidale du temps : $u_{AD} = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ en appelant φ l'angle $(\vec{I}, \overrightarrow{u_{AD}})$.



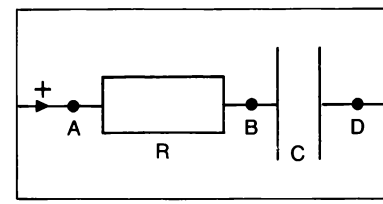
Déterminons U_m en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle d'hypoténuse U_m :

$$U_m = \sqrt{R^2 I_m^2 + L^2 \omega^2 I_m^2} = I_m \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2} = 51\,V.$$

L'angle $\varphi = (\vec{i}, \overrightarrow{u_{AD}})$ est positif, dans le même triangle rectangle $\text{tg}\,\varphi = \dfrac{L\omega I_m}{R I_m} = \dfrac{L\omega}{R} = 0{,}667$, d'où $\varphi = 0{,}588$ rad.

Par suite $u_{AD} = 51 \cos(200\,t + 0{,}588)$ en unités S.I.

E 32. *Un dipôle* AD *est constitué par un résistor* AB *de résistance* $R = 30\,\Omega$ *et un condensateur* BD *de capacité* $C = 10^{-4}$ F. *Le dipôle est parcouru par un courant alternatif sinusoidal* $i = I_m \cos \omega t$ *avec* $I_m = 0{,}2$ A *et* $\omega = 500$ rad·s^{-1}.



a) *Donner les expressions de* u_{AB} *et* u_{BD} *en fonction de* t.

b) *Indiquer comment construire les vecteurs de Fresnel* $\overrightarrow{u_{AB}}$ *et* $\overrightarrow{u_{BD}}$ *à partir du vecteur de Fresnel* $\vec{i}$.

c) *Construire le vecteur de Fresnel* $\overrightarrow{u_{AD}}$, *que peut-on dire relativement à la fonction* $u_{AD} = f(t)$?

S 32. *a*) • $u_{AB} = Ri = RI_m \cos \omega t$, numériquement $u_{AB} = 6 \cos 500\,t$ (en unités S.I.).

• Soit q la charge de l'armature B, $q = Cu_{BD}$. Le sens + arrivant au condensateur par l'armature B, $i = \dfrac{dq}{dt}$. La fonction q, qui oscille autour de la valeur zéro, qui admet pour dérivée i, est appelée la primitive alternative de i, on la note $q = \int i\,dt$.

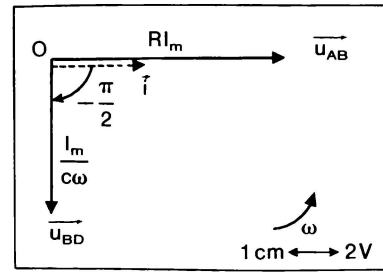
Par suite $u_{BD} = \dfrac{q}{C} = \dfrac{1}{C} \int i\,dt$.

La primitive alternative de $i = I_m \cos \omega t$ est $\int i\,dt = \dfrac{I_m}{\omega} \cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right)$, en effet en dérivant $\dfrac{I_m}{\omega} \cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right)$ on retrouve i.

La tension u_{BD} a donc pour expression

$$u_{BD} = \frac{I_m}{C\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = 4 \cos\left(500\,t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ en unités S.I.}$$

b) • On passe de $\vec{i}$ à $\overrightarrow{u_{AB}}$ représentant $u_{AB} = Ri$, en multipliant le vecteur $\vec{i}$ par R.

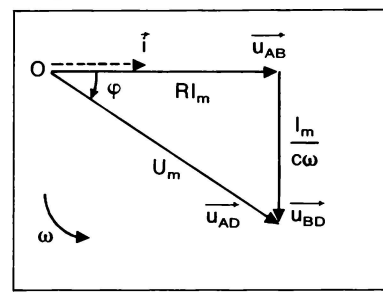


• $u_{BD} = \dfrac{I_m}{C\omega} \cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right)$ est en quadrature retard sur $i = I_m \cos \omega t$: l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{u_{BD}}) = -\dfrac{\pi}{2}$ rad.

De plus le module de $\overrightarrow{u_{BD}}$ est $C\omega$ fois plus faible que celui de $\vec{i}$. On passe donc de $\vec{i}$ à $\overrightarrow{u_{BD}}$ en effectuant une rotation de $-\dfrac{\pi}{2}$ rad et en divisant le module par $C\omega$.

c) • D'après la loi des tensions, à chaque instant, $u_{AD} = u_{AB} + u_{BD}$. Le vecteur de Fresnel associé à u_{AD} est $\overrightarrow{u_{AD}} = \overrightarrow{u_{AB}} + \overrightarrow{u_{BD}}$.

Le vecteur $\overrightarrow{u_{AD}}$ tourne à la vitesse angulaire $\omega = 500$ rad·s^{-1}, son module U_m reste constant, donc u_{AD} est une fonction sinusoïdale du temps : $u_{AD} = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ en appelant φ l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{u_{AD}})$ qui est ici négatif.



D'après le théorème de Pythagore :

$$U_m = \sqrt{R^2 I_m^2 + \frac{I_m^2}{C^2\omega^2}} = I_m \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}} \doteq 7{,}21 \text{ V.}$$

Dans le même triangle rectangle

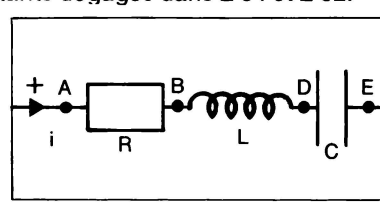
$$\text{tg}\,|\varphi| = \frac{\dfrac{I_m}{C\omega}}{RI_m} = \frac{1}{RC\omega} = 0{,}667, \text{ donc } |\varphi| = 0{,}588 \text{ rad.}$$

Comme φ est négatif, $\varphi = -0{,}588$ rad.
Par suite $u_{AD} = 7{,}21 \cos(500\,t - 0{,}588)$ en unités S.I.

73 Lois d'Ohm, sa représentation par des vecteurs de Fresnel.

Mémorisons les résultats importants dégagés dans E 31 et E 32.

• *Lois d'Ohm instantanées.*
L'intensité instantanée i est la même dans les différents dipôles en série.
A chaque instant
$u_{AE} = u_{AB} + u_{BD} + u_{DE}$.
Posons $i = I_m \cos \omega t$.



$$u_{AB} = Ri = RI_m \cos \omega t$$

$$u_{BD} = L\frac{di}{dt} = L\omega I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right):$$

pour dériver il suffit d'ajouter $+\frac{\pi}{2}$ à la phase et de multiplier l'amplitude par ω.

$u_{DE}=\frac{q}{C}=\frac{1}{C}\int i\,dt=\frac{I_m}{C\omega}\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$: pour obtenir la primitive alternative il suffit d'ajouter $-\frac{\pi}{2}$ à la phase et de diviser l'amplitude par ω.

Donc $$u_{AE}=Ri+L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int i\,dt.$$

• *Construction des vecteurs de Fresnel.*

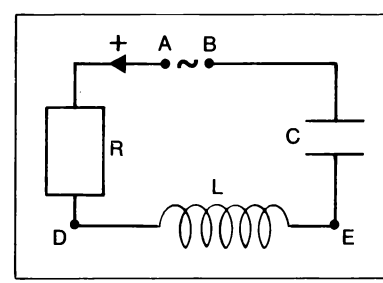
— On passe du vecteur $\vec{I}$ au vecteur $\overrightarrow{u_{AB}}$ représentant $u_{AB}=Ri$ en multipliant le vecteur $\vec{I}$ par R.

— On passe du vecteur $\vec{I}$ au vecteur $\overrightarrow{u_{BD}}$ représentant $u_{BD}=L\frac{di}{dt}$ en tournant le vecteur $\vec{I}$ de $+\frac{\pi}{2}$ rad et en multipliant son module par $L\omega$.

— On passe du vecteur $\vec{I}$ au vecteur $\overrightarrow{u_{DE}}$ représentant $u_{DE}=\frac{1}{C}\int i\,dt$ en tournant le vecteur $\vec{I}$ de $-\frac{\pi}{2}$ rad et en divisant son module par $C\omega$.

E 33. *Une «prise EDF» AB impose une tension alternative sinusoïdale de fréquence* $N=50$ Hz, *de valeur efficace* $U=220$ V.

Un circuit comprenant un résistor de résistance $R=30\ \Omega$, *une bobine d'auto-inductance* $L=6\cdot10^{-2}$ H *et de résistance négligeable, un condensateur de capacité* $C=10^{-4}$ F, *relie la borne* A *à la borne* B.



a) *Construire les vecteurs de Fresnel* $\vec{I}$, $\overrightarrow{u_{AD}}$, $\overrightarrow{u_{DE}}$, $\overrightarrow{u_{EB}}$ *et* $\overrightarrow{u_{AB}}$. *La construction sera faite de façon que les modules des vecteurs représentent les valeurs efficaces des grandeurs sinusoïdales correspondantes et en respectant grossièrement les ordres de grandeur de ces valeurs efficaces.*

b) *Définir et calculer l'impédance* Z *du circuit.*

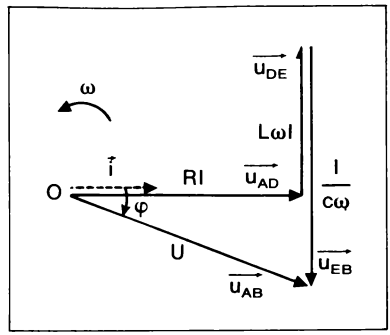
c) *Quelle est l'intensité efficace* I *du courant qui traverse le circuit?*

d) *Calculer le déphasage* φ *de* u_{AB} *par rapport à* i, *en déduire la fonction qui est en retard sur l'autre.*

e) α) *On pose, en choisissant l'origine des dates à un instant où* i *est maximum,* $i=I_m\cos\omega t$. *Quelle est alors l'expression de* u_{AB}?

β) *On pose, en choisissant une nouvelle origine des dates à un instant où* u_{AB} *est maximum,* $u_{AB}=U_m\cos\omega t$. *Quelle est alors l'expression de* i?

S 33. *a*) — D'après la loi d'Ohm aux bornes du résistor : le sens + allant de A vers D, $u_{AD} = Ri$. Le vecteur de Fresnel $\overrightarrow{u_{AD}}$ associé à u_{AD} est en phase avec $\vec{i}$, son module est RI_m. Cependant si on convient de « travailler » en valeurs efficaces, son module est alors RI (cela revient à diviser tous les vecteurs de Fresnel par $\sqrt{2}$).



— Aux bornes de la bobine $u_{DE} = \frac{Ldi}{dt}$, on passe du vecteur $\vec{i}$ au vecteur de Fresnel $\overrightarrow{u_{DE}}$ en effectuant une rotation $+\frac{\pi}{2}$ et en multipliant le module de $\vec{i}$ par Lω : le module de $\overrightarrow{u_{DE}}$, en valeur efficace, est donc LωI.

— Aux bornes du condensateur $u_{EB} = \frac{q}{C} = \frac{1}{C}\int idt$, on passe du vecteur $\vec{i}$ au vecteur de Fresnel $\overrightarrow{u_{EB}}$ en effectuant une rotation $-\frac{\pi}{2}$ et en divisant le module de $\vec{i}$ par Cω : le module de $\overrightarrow{u_{EB}}$, en valeur efficace, est donc $\frac{I}{C\omega}$.

— Aux bornes de la prise : $u_{AB} = u_{AD} + u_{DE} + u_{EB}$.
Par suite le vecteur de Fresnel représentant u_{AB} est :

$$\overrightarrow{u_{AB}} = \overrightarrow{u_{AD}} + \overrightarrow{u_{DE}} + \overrightarrow{u_{EB}}.$$

Pour tracer ces vecteurs, remarquons que les modules de $\overrightarrow{u_{AD}}$, $\overrightarrow{u_{DE}}$ et $\overrightarrow{u_{EB}}$ sont respectivement RI = 30 I,

$$L\omega I = L\,2\pi NI = 18{,}8\ I, \quad \frac{I}{C\omega} = 31{,}8\ I.$$

(Deux grandeurs sont représentées sur la figure l'une ($\vec{i}$) qui s'exprime en ampères, les autres s'expriment en volts. Deux échelles doivent donc être choisies : nous avons représenté I ampères par 1 cm, 10 I volts par 1 cm.)

b) • La tension u_{AB} est une fonction sinusoïdale du temps de valeur efficace U; l'intensité i est une fonction sinusoïdale du temps, de même fréquence, de valeur efficace I.
Par définition l'impédance Z du dipôle (R, L, C) pour cette fréquence est :

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m}.$$

• D'après le théorème de Pythagore $U = \sqrt{R^2 I^2 + \left(\frac{I}{C\omega} - L\omega I\right)^2}$

$$U = I\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2}.$$

D'où $$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2} = 32{,}7\ \Omega.$$

c) L'intensité efficace $I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{32,7} = 6,73$ A.

d) Le déphasage de u_{AB} par rapport à i est l'angle $\varphi = (\vec{i}, \overrightarrow{u_{AB}})$. Cet angle est ici négatif $\left(\text{car } \frac{1}{C\omega} > L\omega I\right)$. Par suite u_{AB} est en retard sur i.

Dans le triangle rectangle d'hypoténuse U :

$$\text{tg } |\varphi| = \frac{\frac{I}{C\omega} - L\omega I}{RI} = \frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R}.$$

Comme φ est un angle aigu négatif, tg $\varphi < 0$: on peut donc écrire :

$$\text{tg } \varphi = -\text{tg } |\varphi| = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = -0,433, \text{ d'où } \varphi = -0,409 \text{ rad.}$$

e) α) Si $i = I_m \cos \omega t$, $u = U_m \cos(\omega t + \varphi)$. Vérifions bien qu'alors φ = (phase de u − phase de i) : c'est le déphasage de u par rapport à i.

Numériquement $u = 220\sqrt{2} \cos(100\pi t - 0,409)$ en unités S.I.

β) Si $u = U_m \cos \omega t$, $i = I_m \cos(\omega t - \varphi)$. Vérifions bien qu'alors φ = (phase de u − phase de i) : c'est le déphasage de u par rapport à i.

Numériquement $i = 6,73\sqrt{2} \cos(100\pi t + 0,409)$ en unités S.I.

74 Impédance d'un circuit série (R, L, C).

• Lorsqu'un dipôle est excité par une tension alternative sinusoïdale de tension efficace U (ou de tension maximale $U_m = U\sqrt{2}$), de pulsation ω, il est parcouru par un courant alternatif sinusoïdal de même pulsation ω, de valeur efficace I (ou de valeur maximale $I_m = I\sqrt{2}$).

Le rapport $$Z = \frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m}$$

est l'impédance du dipôle pour cette pulsation ω. L'impédance se mesure en ohms.

• Si le dipôle est un dipôle R, L, C en série, son impédance pour la pulsation ω est :

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}.$$

On pourra utiliser cette formule sans démonstration lorsque l'énoncé ne demande pas de l'établir.

• Il faut savoir adapter la formule précédente :

— si le dipôle est un résistor $\left(\text{on retire } L\omega, \text{ on retire } \frac{1}{C\omega}\right)$, d'où $Z = R$.

— si le dipôle est une bobine résistante et inductive $\left(\text{on retire } \frac{1}{C\omega}\right)$, d'où $Z=\sqrt{R^2+L^2\omega^2}$;

— si le dipôle est une bobine purement inductive $\left(\text{on retire R, on retire } \frac{1}{C\omega}\right)$, d'où $Z=L\omega$;

— si le dipôle est une association résistor-condensateur en série (on retire $L\omega$), d'où $Z=\sqrt{R^2+\frac{1}{C^2\omega^2}}$;

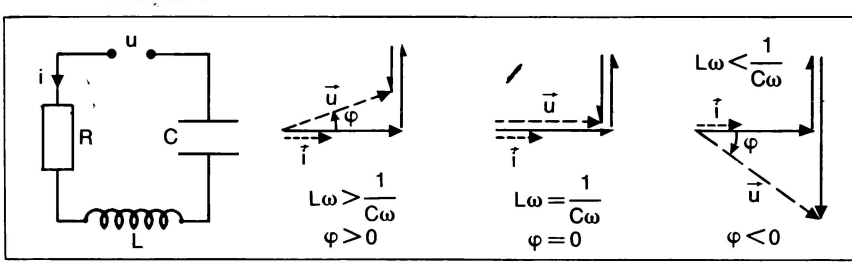
— si le dipôle est un condensateur (on retire R, on retire $L\omega$), d'où $Z=\frac{1}{C\omega}$;

— si le dipôle comprend un résistor R_1, une bobine (R_2, L), un condensateur en série, $Z=\sqrt{(R_1+R_2)^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}$.

Remarque importante. • Soit deux dipôles $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ en série :
— il y a toujours addition des tensions instantanées $u=u_1+u_2$;
— dans le cas général il n'y a pas addition des tensions efficaces $U \neq U_1+U_2$;
— dans le cas général il n'y a pas addition des impédances $Z \neq Z_1+Z_2$.

75 Déphasage entre la tension instantanée excitant un dipôle (R, L, C en série) et l'intensité instantanée du courant.

• Considérons une tension sinusoïdale alternative u, de pulsation ω, appliquée aux bornes d'un dipôle R, L, C en série. En exploitant $u=u_R+u_L+u_C$, on aboutit aux constructions de Fresnel :



• On considère le déphasage φ de u par rapport à i : $\varphi = (\vec{i}, \vec{u})$.

• Le signe de φ dépend de $L\omega$ et $\frac{1}{C\omega}$:

— si $L\omega > \frac{1}{C\omega}$, $\varphi > 0$, u aux bornes du circuit R, L, C en série est en avance sur i;

— si $L\omega = \frac{1}{C\omega}$, $\varphi = 0$, u et i sont en phase;

— si $L\omega < \frac{1}{C\omega}$, $\varphi < 0$, u est en retard sur i.

• Pour déterminer φ, angle compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, on peut :

— utiliser $\mathbf{tg\ \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}}$ qui donne φ en grandeur et en signe;

— utiliser $\mathbf{\cos \varphi = \frac{RI}{U} = \frac{R}{Z}}$ qui permet d'évaluer $|\varphi|$, on en déduira alors φ en tenant compte des remarques sur le signe de φ énoncées ci-dessus.

• *Remarque :* Si on pose $i = I_m \cos \omega t$ alors $u = U_m \cos(\omega t + \varphi)$. si on pose $u = U_m \cos \omega t$, alors $i = I_m \cos(\omega t - \varphi)$ (revoir E 33, e).

E 34. *On maintient entre les bornes d'une portion de circuit une tension alternative sinusoïdale* u *de valeur efficace* $U = 6$ V *et de fréquence* $f = 5\,000$ Hz.

— *Première expérience : la portion de circuit comprend, placés en série, un résistor de résistance* R *et une bobine d'inductance* L *et de résistance négligeable; l'intensité efficace du courant est alors* $I_1 = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ A.

— *Deuxième expérience : on remplace la bobine par un condensateur de capacité* $C = 0{,}3 \cdot 10^{-6}$ F; *l'intensité efficace du courant est alors* $I_2 = 5 \cdot 10^{-2}$ A.

a) *Déduire de ces deux expériences les valeurs de* L *et* R.

b) *Quel est le déphasage* φ_1 *de* u *par rapport à* i_1? *Quel est le déphasage* φ_2 *de* u *par rapport à* i_2?

(D'après bac)

S 34. *a)* • Soit Z_1 l'impédance du circuit (R, L) : $Z_1 = \frac{U}{I_1} = \frac{6}{2{,}5 \cdot 10^{-2}} = 240\ \Omega$.

D'autre part $Z_1 = \sqrt{R^2 + (L\,2\pi f)^2}$, d'où la première équation :

$$R^2 + 4\pi^2 f^2 L^2 = Z_1^2 \quad \text{soit} \quad R^2 + 9{,}87 \cdot 10^8\, L^2 = 5{,}76 \cdot 10^4. \qquad (1)$$

• Soit Z_2 l'impédance du circuit (R, C) : $Z_2 = \frac{U}{I_2} = \frac{6}{5 \cdot 10^{-2}} = 120\ \Omega$.

D'autre part $Z_2 = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\,2\pi f}\right)^2}$, d'où la deuxième équation :

$$R^2 + \frac{1}{4\pi^2 f^2 C^2} = Z_2^2 \quad \text{soit} \quad R = \sqrt{Z_2^2 - \frac{1}{4\pi^2 f^2 C^2}} = 56\ \Omega. \qquad (2)$$

En reportant dans (1), on obtient $L = \sqrt{\frac{5{,}76 \cdot 10^4 - 56^2}{9{,}87 \cdot 10^8}} = 7{,}43 \cdot 10^{-3}$ H.

b) • Le déphasage φ_1 de u par rapport à i_1 (première expérience) est donné, en grandeur et en signe, par $\text{tg}\,\varphi_1 = \dfrac{L\,2\pi f}{R} = 4{,}17$, d'où $\varphi_1 = 1{,}33$ rad : φ_1 est positif, la tension u est en avance sur i_1.

• Le déphasage φ_2 de u par rapport à i_2 (deuxième expérience) est donné, en grandeur et en signe, par $\text{tg}\,\varphi_2 = \dfrac{-\dfrac{1}{C\,2\pi f}}{R} = \dfrac{-1}{2\pi f RC} = -1{,}89$,
d'où $\varphi_2 = -1{,}08$ rad : φ_2 est négatif, la tension u est en retard sur i_2.

E 35. *On monte en série un résistor* R *de résistance* R *et une bobine* B *de résistance* r *et d'auto-inductance* L. *On alimente l'ensemble par une tension alternative sinusoïdale* u *de fréquence* N = 50 Hz.
A l'aide d'un voltmètre pour courant alternatif on mesure les tensions efficaces : U *aux bornes de l'ensemble,* U_R *aux bornes du résistor* R *et* U_B *aux bornes de la bobine. On relève* U = 3,84 V, $U_R = 2$ V, $U_B = 2{,}17$ V.
A l'aide d'un ampèremètre pour courant alternatif on mesure l'intensité efficace du courant qui traverse l'ensemble, on relève I = 0,5 A.

a) *Quelle est la relation entre les tensions instantanées* u, u_R *et* u_B?

b) *Quelles sont les impédances* Z, Z_R et Z_B *respectivement de l'ensemble du circuit, du résistor, de la bobine?*

c) *En déduire* R, r *et* L.

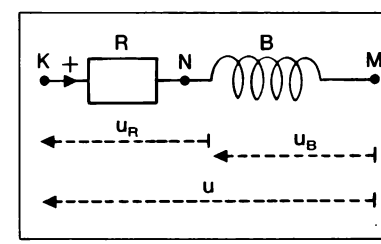
d) *L'origine des dates est choisie de façon que* $i = I\sqrt{2}\cos 2\pi Nt$, *donner les expressions des tensions instantanées* u, u_R *et* u_B.

S 35. *a*) Soit K, N et M les bornes de R et B. Prenons le sens + pour mesurer l'intensité i dans le sens KNM.
Les tensions à considérer pour les lois d'Ohm sont :

$$u_R = V_K - V_N, \quad u_B = V_N - V_M$$

et $u = V_K - V_M$.

A chaque instant $u = u_R + u_B$.



Remarque. Nous constatons que $U \neq U_R + U_B$, il est très important de ne pas confondre les u minuscules (tensions instantanées) et les U majuscules (tensions efficaces).

b) • Pour l'ensemble : $Z = \dfrac{U}{I} = \dfrac{3{,}84}{0{,}5} = 7{,}68\ \Omega$.

• Pour le résistor R : $Z_R = \dfrac{U_R}{I} = \dfrac{2}{0{,}5} = 4\ \Omega$.

• Pour la bobine B : $Z_B = \dfrac{U_B}{I} = \dfrac{2{,}17}{0{,}5} = 4{,}34\ \Omega$.

Remarque. Insistons bien sur le fait que les impédances ne sont pas additives dans le cas général.

c) • Pour le résistor R, $Z_R = R$, donc $R = 4\ \Omega$.

• Pour la bobine B, $Z_B = \sqrt{r^2 + (2\pi NL)^2}$, d'où la première équation comportant les inconnues r et L :

$$r^2 + 4\pi^2 N^2 L^2 = Z_B^2 \quad \text{soit} \quad r^2 + 9{,}87 \cdot 10^4 L^2 = 18{,}8. \qquad (1)$$

• Pour l'ensemble, de résistance totale r + R, $Z = \sqrt{(r+R)^2 + (2\pi NL)^2}$, d'où la deuxième équation :

$$(r+R)^2 + 4\pi^2 N^2 L^2 = Z^2 \quad \text{soit} \quad (r+4)^2 + 9{,}87 \cdot 10^4 L^2 = 59. \qquad (2)$$

• Retranchons (1) de (2), on obtient :

$$(r+4)^2 - r^2 = 59 - 18{,}8$$
$$r^2 + 8r + 16 - r^2 = 59 - 18{,}8$$

d'où $r = 3{,}02\ \Omega$.

• Reportons la valeur de r dans (1), on détermine $L = 9{,}90 \cdot 10^{-3}$ H.

d) • Aux bornes de l'ensemble u est déphasée par rapport à i de φ tel que :

$$\text{tg}\ \varphi = \frac{L\omega}{(R+r)} = \frac{9{,}90 \cdot 10^{-3} \times 100 \times \pi}{(4+3{,}02)} = 0{,}443 \quad \text{d'où} \quad \varphi = 0{,}417 \text{ rad.}$$

Comme $i = I\sqrt{2} \cos 100\pi t$, $u = 3{,}84\sqrt{2} \cos(100\pi t + 0{,}417)$.

(Vérifier bien : φ représente (phase de u − phase de i).)

• Aux bornes du résistor R, u_R et i sont en phase, donc $u_R = 2\sqrt{2} \cos 100\pi t$.

• Aux bornes de la bobine B, u_B est déphasée par rapport à i de φ_B tel que :

$$\text{tg}\ \varphi_B = \frac{L\omega}{r} = \frac{9{,}90 \cdot 10^{-3} \times 100 \times \pi}{3{,}02} = 1{,}03 \quad \text{d'où} \quad \varphi_B = 0{,}80 \text{ rad.}$$

Par suite $u_B = 2{,}17\sqrt{2} \cos(100\pi t + 0{,}80)$.

E 36. *Le circuit représenté sur la figure comprend, montés en série, un condensateur* AB *de capacité* C, *un conducteur ohmique* BD *de résistance* $R = 100\ \Omega$, *un ampèremètre de résistance négligeable, et un générateur délivrant une tension alternative sinusoïdale de fréquence* N. *Un voltmètre est branché en dérivation aux bornes du générateur. Les tensions* u_{AD} *et* u_{BD} *sont visualisées sur l'écran d'un oscillographe bicourbe de caractéristiques suivantes :*
— *balayage horizontal :* $2 \cdot 10^{-3}$ s·div^{-1};
— *voies* 1 *et* 2 : *la sensibilité de la déviation verticale est* 5 V·div^{-1}.

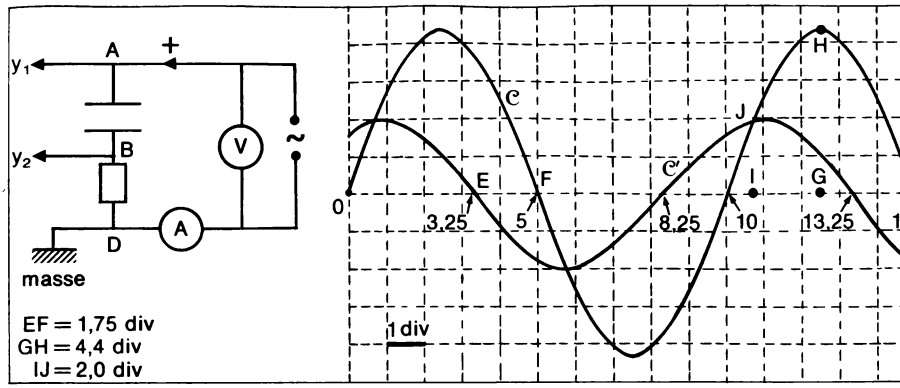
a) *A partir de l'observation de l'écran déterminer :*

α) *la fréquence et la pulsation de la tension délivrée par le générateur;*

β) *la courbe qui correspond à la voie* y_2;

γ) *les indications du voltmètre et de l'ampèremètre;*

δ) *la valeur du déphasage de la tension* u_{AD} *délivrée par le générateur par rapport à l'intensité du courant.*



b) *Calculer l'impédance du dipôle* AD, *la capacité du condensateur.*

c) *Donner les expressions en fonction du temps de* u_{BD}, u_{AD}, *de la charge* q_B *de l'armature* B, *sachant que l'origine des dates est telle que* $i = I_m \cos \omega t$.

(D'après bac)

S 36. *a*) α) Les deux courbes tracées sur l'écran ont la même période T : une oscillation s'étalant sur 10 div :

$$T = 2 \cdot 10^{-3}\ s \cdot div^{-1} \times 10\ div = 20 \cdot 10^{-3}\ s = 2 \cdot 10^{-2}\ s.$$

Par suite la fréquence (des tensions, donc aussi du courant i) est $N = \frac{1}{T} = 50$ Hz, la pulsation est :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi N = 100\pi = 314\ rad \cdot s^{-1}.$$

β) • Le dipôle AD est un dipôle (R, C en série), le déphasage de u_{AD} par rapport à i est φ tel que $\text{tg}\ \varphi = \frac{-\frac{1}{C\omega}}{R} = -\frac{1}{RC\omega}$: φ est négatif. Cela signifie que u_{AD} est en retard sur i donc sur $u_{BD} = Ri$.
La courbe $\mathcal{C}$ qui est retard correspond donc à u_{AD}; la courbe $\mathcal{C}'$, qui est en avance, correspond à u_{BD}, c'est elle qui est tracée sur la voie 2.

γ) • D'après la courbe $\mathcal{C}$ qui représente les variations de u_{AD} en fonction du temps et en remarquant que GH = 4,4 div (voir les indications jointes au graphique) :

$U_{AD,\,m} = 4{,}4\ div \times 5\ V \cdot div^{-1} = 22\ V$. Par suite $U_{AD} = \frac{U_{AD,\,m}}{\sqrt{2}} = 15{,}6\ V$: c'est l'indication lue sur le voltmètre placée en dérivation entre A et D.

• D'après la courbe $\mathcal{C}'$ qui représente les variations de $u_{BD} = Ri$ en fonction du temps, $U_{BD,\,m} = RI_m = 2\ div \times 5\ V \cdot div^{-1} = 10\ V$, par suite :

$$I_m = \frac{10}{R} = 0{,}1\ A \quad \text{et} \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 7{,}07 \cdot 10^{-2}\ A = 70{,}7\ mA :$$

c'est l'indication lue sur l'ampèremètre.

δ) • Le déphasage φ de u_{AD} par rapport à i est négatif (voir β)), il est égal au déphasage de u_{AD} par rapport à u_{BD}.

• Soit $|\varphi|$ la valeur absolue du déphasage de u_{AD} par rapport à u_{BD}, soit $\mathcal{T}$ l'écart temporel entre u_{AD} et u_{BD} : $\mathcal{T} = \dfrac{|\varphi|}{\omega}$ (revoir $\mathcal{M}$ 71).

L'écart temporel $\mathcal{T}$ est la durée correspondant au segment EF de longueur 1,75 div :

$$\mathcal{T} = 1{,}75 \text{ div} \times 2 \cdot 10^{-3} \text{ s} \cdot \text{div}^{-1} = 3{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ s}.$$

Par suite $$|\varphi| = \omega \mathcal{T} = 314 \times 3{,}5 \cdot 10^{-3} = 1{,}1 \text{ rad}.$$

• En résumé le déphasage de u_{AD} par rapport à i est $\varphi = -|\varphi| = -1{,}1$ rad.

b) • Soit Z_{AD} l'impédance du dipôle AD de résistance R :

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z_{AB}} \text{ d'où } Z_{AB} = \frac{R}{\cos \varphi} = 220\ \Omega.$$

• Pour évaluer la capacité du condensateur on peut partir :
— de l'impédance :

$$Z_{AB} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}} \text{ d'où } C = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{1}{Z_{AB}^2 - R^2}} = 1{,}62 \cdot 10^{-5} \text{ F}$$

— du déphasage entre u_{AD} et i :

$$\text{tg } \varphi = \frac{-1}{RC\omega} \text{ d'où } C = \frac{-1}{R\omega \text{ tg } \varphi} = 1{,}62 \cdot 10^{-5} \text{ F}.$$

c) • Si $i = I_m \cos \omega t$, $u_{AD} = U_{AD,\,m} \cos(\omega t + \varphi)$ en désignant par φ le déphasage de u_{AD} par rapport à i calculé au *a*) δ). Numériquement, en unités S.I., $u_{AD} = 22 \cos(100\pi t - 1{,}1)$.

• Comme $u_{BD} = Ri$, $u_{BD} = RI_m \cos \omega t = 10 \cos 100\pi t$ en unités S.I.

• La charge q_B de l'armature B est liée à la tension u_{BA} par $q_B = Cu_{BA}$.
D'après la loi d'Ohm instantanée, le sens + traversant le condensateur de A vers B, $u_{AB} = \dfrac{1}{C}\int i\,dt = \dfrac{I_m}{C\omega} \cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right)$ (revoir $\mathcal{M}$ 73 comment déterminer la primitive alternative).

Par suite $$q_B = Cu_{BA} = -Cu_{AB} = -\frac{I_m}{\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Numériquement, en unités S.I. :

$$q_B = -3{,}18 \cdot 10^{-4} \cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right) = 3{,}18 \cdot 10^{-4} \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Remarque. On constate que u_{AB} est déphasée de $-\dfrac{\pi}{2}$ par rapport à i (u_{AB} est en quadrature retard sur i), pour retrouver ce résultat à l'aide de l'expression de tg φ donnée dans $\mathcal{M}$ 75 il faut considérer que pour un condensateur $L = R = 0$, par suite tg $\varphi = -\infty$ et $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$.

E 37. *Un générateur de tension alternative sinusoïdale maintient entre ses bornes une tension* $u_{DA} = U_m \cos \omega t$.
On place en série aux bornes de ce générateur un résistor AB *de résistance* $R = 100\ \Omega$ *et une bobine d'inductance* L *et de résistance* r.
On observe sur l'écran d'un oscillographe bicourbe les courbes représentant les tensions u_{BA} *et* u_{DA} *en fonction du temps.*
La sensibilité verticale est de $4\ V \cdot div^{-1}$ *sur les deux voies; l'échelle des temps est de* 1 ms *par division.*
A partir de l'examen de ces courbes, déterminer :

a) la pulsation du courant;

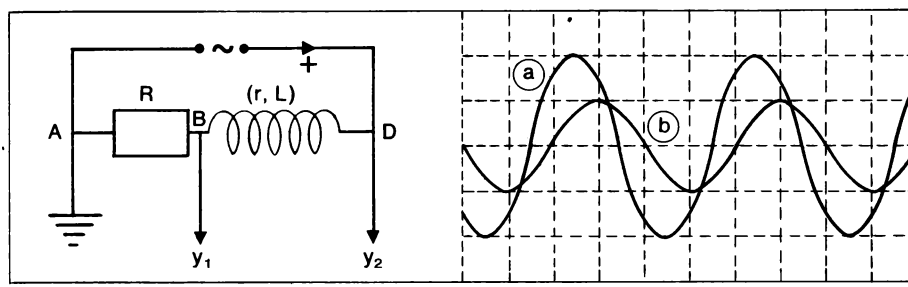
b) *la courbe qui représente* u_{DA};

c) *le déphasage entre* u_{DA} *et* i;

d) *l'impédance de* DA;

e) *la résistance* r *de la bobine;*

f) *l'auto-inductance* L *de la bobine.*



(D'après bac)

S 37. (La rédaction est abrégée car ce problème ressemble à E 36).

a) $T = 4 \cdot 10^{-3}$ s, $\omega = 1571\ rad \cdot s^{-1}$.

b) Soit φ le déphasage de u_{DA} par rapport à i, $\text{tg}\ \varphi = \dfrac{L\omega}{r+R} > 0$, donc $\varphi > 0$: u_{DA} est en avance sur i donc sur $u_{BA} = Ri$. Par suite u_{DA} est représentée par la courbe ⓐ.

c) $\varphi = |\varphi| = \omega \mathcal{T}$ (revoir ℳ 71); $\mathcal{T} = 0{,}5$ ms d'où $\varphi = 0{,}785$ rad.

d) $U_{DA,\,m} = 8$ V; $U_{BA,\,m} = RI_m = 4$ V donc $I_m = 4 \cdot 10^{-2}$ A.

Par suite $$Z_{DA} = \frac{U_{DA,\,m}}{I_m} = 200\ \Omega.$$

e) $\cos \varphi = \dfrac{r+R}{Z_{DA}}$ d'où $r = Z_{DA} \cos \varphi - R = 41{,}5\ \Omega$.

f) Exploiter $Z_{DA} = \sqrt{(R+r)^2 + L^2\omega^2}$ ou bien $\text{tg}\ \varphi = \dfrac{L\omega}{r+R}$.

Ainsi avec tg φ, on obtient $L = \dfrac{(r+R)\ \text{tg}\ \varphi}{\omega} = 9 \cdot 10^{-2}$ H.

E 38. *Un circuit électrique comprend disposés en série un conducteur ohmique de résistance* $R_1 = 10\ \Omega$, *une bobine de résistance* $r_1 = 3\ \Omega$, *d'auto-inductance* $L_1 = 10^{-2}$ H, *un condensateur de capacité* $C_1 = 10^{-5}$ F, *une autre bobine de résistance* $r_2 = 5\ \Omega$, *d'auto-inductance* $L_2 = 3 \cdot 10^{-2}$ H *et un autre condensateur de capacité* $C_2 = 4 \cdot 10^{-5}$ F. *Ce circuit est alimenté par un générateur de tension alternative sinusoïdale de pulsation* $\omega = 10^3$ rad·s^{-1}, *de valeur efficace* $U = 50$ V.

a) *Quelle est la résistance totale du circuit? Quelle est l'auto-inductance totale? Quelle est la capacité totale?*

b) *Quelle est l'impédance du circuit? En déduire l'intensité efficace du courant qui le traverse.*

c) *Quel est le déphasage entre la tension instantanée* u *aux bornes du circuit et l'intensité instantanée* i?

S 38. *a*) Soit u_{R_1}, u_{B_1}, u_{C_1}, u_{B_2} et u_{C_2} les tensions instantanées aux bornes des dipôles successivement énumérés par l'énoncé.
La tension instantanée $u = u_{R_1} + u_{B_1} + u_{C_1} + u_{B_2} + u_{C_2}$.
D'après les lois d'Ohm instantanées $u_{R_1} = R_1 i$; $u_{B_1} = r_1 i + L_1 \dfrac{di}{dt}$; $u_{C_1} = \dfrac{1}{C_1} \int i\,dt$;
$u_{B_2} = r_2 i + L_2 \dfrac{di}{dt}$ et $u_{C_2} = \dfrac{1}{C_2} \int i\,dt$.
Par suite $u = R_1 i + r_i i + L_1 \dfrac{di}{dt} + \dfrac{1}{C_1} \int i\,dt + r_2 i + L_2 \dfrac{di}{dt} + \dfrac{1}{C_2} \int i\,dt$.
Par associativité :

$$u = (R_1 + r_1 + r_2) i + (L_1 + L_2) \frac{di}{dt} + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \int i\,dt. \qquad (1)$$

Appelons R, L et C la résistance totale, l'auto-inductance totale et la capacité totale du circuit :

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i\,dt. \qquad (2)$$

En comparant (1) et (2), on obtient $R = R_1 + r_1 + r_2 = 18\ \Omega$;
$L = L_1 + L_2 = 4 \cdot 10^{-2}$ H; $\dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}$ d'où $C = \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 8 \cdot 10^{-6}\ \text{F} = 8\ \mu\text{F}$.

b) • L'indépendance du circuit $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}$
$= \sqrt{18^2 - (40 - 125)^2} = 86{,}9\ \Omega$.

• $I = \dfrac{U}{Z} = \dfrac{50}{86{,}9} = 0{,}575$ A.

c) Soit φ le déphasage de u par rapport à i, $\text{tg}\,\varphi = \dfrac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R} = \dfrac{40 - 125}{18} = -4{,}72$, d'où $\varphi = -1{,}36$ rad. Comme φ est négatif, u est en retard sur i. Ceci provient du fait que $L\omega = L_1\omega + L_2\omega$ est inférieur à $\dfrac{1}{C\omega} = \dfrac{1}{C_1\omega} + \dfrac{1}{C_2\omega}$, on dit parfois que « l'effet capacitif » l'emporte sur « l'effet inductif ».

E 39. a) *Une bobine a une résistance* R *et une auto-inductance* L. *Lorsqu'elle est alimentée par un générateur* G_1 *qui délivre une tension continue* $U_1 = 24$ V, *elle est parcourue par un courant d'intensité* $I_1 = 4{,}8$ A. *Lorsqu'elle est alimentée par un générateur* G_2 *qui délivre une tension alternative sinusoïdale de fréquence* $N_2 = 50$ Hz *et de valeur efficace* $U_2 = 10$ V, *elle est parcourue par un courant d'intensité efficace* $I_2 = 0{,}106$ A. *Déterminer* R *et* L.

b) *Un condensateur de capacité* $C = 5\ \mu F$ *est alimenté par* G_2, *quelle est l'intensité efficace du courant débité par* G_2?

c) *On branche le condensateur sur* G_1, *le condensateur chargé est isolé de* G_1. *On le fait se décharger dans la bobine. Déterminer la fréquence des oscillations pseudo-périodiques qui prennent naissance. On admettra que l'amortissement est sans influence sensible sur la fréquence des oscillations.*

d) *Le dipôle bobine-condensateur en série est maintenant excité par un générateur* G *délivrant une tension alternative sinusoïdale de fréquence* N *réglable et de tension efficace constante, quelle que soit* N, *égale à* $U = 10$ V.

α) *Exprimer l'intensité efficace* I *du courant traversant le dipôle en fonction de* N.

β) *Montrer que* I *passe par un maximum* I_0 *pour une certaine valeur* N_0 *de* N. *Calculer alors l'indépendance du dipôle et le déphasage de* u (*tension instantanée aux bornes de* G) *par rapport à* i.

γ) *Dessiner l'allure de la courbe représentant les variations de* I *en fonction de* N.

S 39. *a)* • Lorsque la bobine est alimentée par le générateur G_1, le courant permanent a une intensité constante : le flux propre à travers la bobine reste constant, la bobine n'est dans ce cas pas inductive, elle se comporte comme un conducteur ohmique. Par suite l'intensité du courant continu $I_1 = \dfrac{U_1}{R}$, d'où $R = \dfrac{U_1}{I_1} = 5\ \Omega$.

• Lorsqu'elle est alimentée par G_2, son flux propre varie constamment : la bobine a une auto-inductance L. Son impédance pour la fréquence N_2 est $Z_2 = \sqrt{R^2 + 4\pi^2 N_2^2 L^2}$.
Comme $Z_2 = \dfrac{U_2}{I_2} = \dfrac{10}{0{,}106} = 94{,}3\ \Omega$, on en déduit $L = \dfrac{\sqrt{Z_2^2 - R^2}}{2\pi N_2} \simeq 0{,}3$ H.

b) • L'impédance du condensateur $Z_2' = \dfrac{1}{2\pi N_2 C} = 637\ \Omega$, l'intensité efficace du courant débité par G_2 est alors $I_2' = \dfrac{U_2}{Z_2'} = 1{,}57 \cdot 10^{-2}$ A.

• *Remarque.* Le courant alternatif ne traverse pas le diélectrique, le condensateur subit une succession périodique de charges et de décharges.

c) • La décharge d'un condensateur dans une bobine de faible résistance est oscillante. Les oscillations libres qui prennent naissance sont pseudo-périodiques car elles s'amortissent à cause de la résistance R. Si on confond la pseudo-fréquence de ces oscillations avec la fréquence propre N_p du circuit (L, C), alors $N_p = \dfrac{\omega_p}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ (revoir ℳ 69).

• Numériquement : $N_p = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{0{,}3 \times 5 \cdot 10^{-6}}} \simeq 130$ Hz.

d) α) Le dipôle subit maintenant des oscillations forcées : le générateur G impose sa fréquence, le courant alternatif sinusoïdal qui prend naissance a pour fréquence N.

Son intensité efficace $I = \dfrac{U}{Z}$.

Comme $Z = \sqrt{R^2 + \left(2\pi NL - \dfrac{1}{2\pi NC}\right)^2}$, il s'ensuit :

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(2\pi NL - \dfrac{1}{2\pi NC}\right)^2}}.$$

U, R, L, C sont des constantes : I dépend de la variable N.

β) Posons $X^2 = \left(2\pi NL - \dfrac{1}{2\pi NC}\right)^2$.

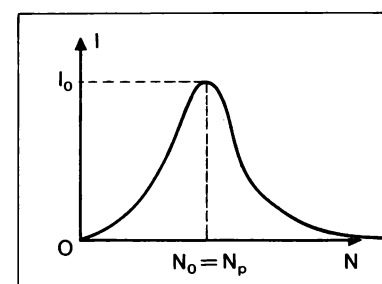
Lorsque N varie, X^2 varie en restant toujours positif ou nul. La valeur minimale de X^2 est donc zéro. Alors $\sqrt{R^2 + X^2}$ est minimal et par suite I est maximale.
Soit N_0 la valeur de N qui annule X, donc qui donne à I sa valeur maximale I_0 :
N_0 est telle que $2\pi N_0 L = \dfrac{1}{2\pi N_0 C}$ soit $N_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \simeq 130$ Hz.
On constate ainsi que I passe par sa valeur maximale I_0, lorsque la fréquence du générateur qui excite le dipôle prend la valeur N_0 égale à la fréquence propre N_p du dipôle : on dit alors qu'il y a résonance.
• A la résonance l'impédance du dipôle $Z_0 = R = 5\ \Omega$; l'intensité efficace maximale $I_0 = \dfrac{U}{Z_0} = 2$ A. (Ne pas confondre l'intensité efficace maximale avec l'intensité maximale I_m).
• A la résonance le déphasage φ_0 de u par rapport à i est tel que :
$\operatorname{tg} \varphi_0 = \dfrac{2\pi N_0 L - \dfrac{1}{2\pi N_0 C}}{R} = 0$ puisque le numérateur est alors nul, par suite $\varphi_0 = 0$: à la résonance la tension aux bornes du circuit est en phase avec l'intensité du courant qui traverse le circuit.

γ) • Nous savons que la courbe passe par un maximum pour $N = N_0$.

• Lorsque N tend vers zéro, $\dfrac{1}{2\pi NC}$ tend vers l'infini, $2\pi NL$ tend vers zéro, le dénominateur de

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(2\pi NL - \dfrac{1}{2\pi NC}\right)^2}}$$

tend vers l'infini et I tend vers zéro : la courbe passe par l'origine.



• Lorsque N tend vers l'infini, $\frac{1}{2\pi NC}$ tend vers zéro, $2\pi NL$ tend vers l'infini, le dénominateur de I tend vers l'infini et I tend vers zéro : la courbe est asymptote à l'axe ON.

76 La résonance d'intensité

• Un circuit série (R, L, C) excité par un générateur G de tension alternative sinusoïdale de pulsation ω subit des oscillations forcées : il est parcouru par un courant alternatif sinusoïdal de pulsation ω.

• La réponse du circuit (caractérisée par l'intensité efficace I du courant) aux excitations de G est maximale lorsque la pulsation ω de G est égale à la pulsation propre ω_0 du circuit (L, C) : on dit alors qu'il y a résonance d'intensité.

La condition de résonance d'intensité est :

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{ou} \quad L\omega = \frac{1}{C\omega}.$$

• Pour obtenir la résonance on peut :

— accorder le générateur sur le dipôle, c'est-à-dire choisir la pulsation ω du générateur égale à la pulsation propre ω_0 du dipôle;

— accorder le dipôle sur le générateur excitateur, c'est-à-dire modifier la pulsation propre ω_0 du dipôle (en modifiant L ou C) pour qu'elle devienne égale à la pulsation ω du générateur.

• Lorsque le circuit est réglé à la résonance :

— l'impédance Z du circuit est minimale, égale à la résistance R du circuit;

— l'intensité efficace I est la plus grande possible;

— l'intensité instantanée i et la tension instantanée aux bornes du circuit sont en phase.

E 40. *(Circuit à C variable.)*

Un circuit comprend, montés en série :

— *un conducteur ohmique de résistance* R;

— *une bobine d'inductance* L *et de résistance négligeable;*

— *un condensateur de capacité variable;*

— *un ampèremètre de résistance négligeable.*

Ce circuit est alimenté par un générateur qui délivre une tension alternative sinusoïdale de fréquence f = 50 Hz *et de valeur efficace constante* U = 100 V.

On relève les valeurs de l'intensité efficace du courant pour quelques valeurs de la capacité :

C(μF)	2	5	7	8	9	10	11	12	15
I(mA)	78	310	670	1020	1560	1990	1790	1430	880

a) Tracer la courbe des variations de I *en fonction de la capacité* C *du condensateur.*

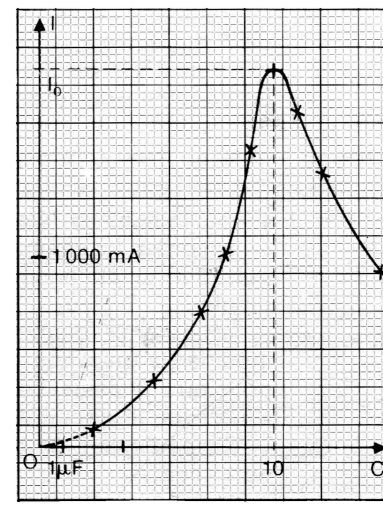
b) *Quel est le phénomène mis en évidence par cette courbe?*
Justifier l'existence du maximum à l'aide de l'expression reliant I *à* C.

c) *Calculer une valeur approchée de l'inductance* L *de la bobine.*

d) *Calculer une valeur approchée de la résistance* R.

e) *Calculer pour* $C = 10\ \mu F$ *la tension efficace aux bornes du condensateur, la tension efficace aux bornes de la bobine.*

S 40. *a)* La courbe représentant les variations de I en fonction de C est représentée ci-dessous.



b) • L'intensité efficace I passe par une valeur maximale I_0 très voisine de 1 990 mA lorsque la capacité C passe par une valeur C_0 voisine de 10 μF.
Pour cette valeur de la capacité le circuit (R, L, C) est accordé sur le générateur, sa fréquence propre est égale à celle du générateur : il y a résonance d'intensité.

• L'impédance du circuit

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC}\right)^2},$$

l'intensité efficace

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC}\right)^2}}.$$

L'intensité efficace dépend de C.

Posons $X^2 = \left(2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC}\right)^2$. Lorsque C varie, X^2 varie en restant positif ou nul. La valeur minimale de X^2 est donc zéro. Alors $\sqrt{R^2 + X^2}$ est minimal et par suite I est maximal.
Soit C_0 la valeur de C qui annule X, donc qui donne à I sa valeur maximale I_0 :
C_0 est telle que $2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC_0} = 0$ soit $C_0 = \frac{1}{4\pi^2 f^2 L}$ (1).

c) D'après l'expression (1), $L = \frac{1}{4\pi^2 f^2 C_0}$. Comme $C_0 \simeq 10\ \mu F$, il s'ensuit que

$$L \simeq \frac{1}{4\pi^2 \times 50^2 \times 10^{-5}} \simeq 1{,}01\ H.$$

d) A la résonance, comme $2\pi fL = \frac{1}{2\pi fC_0}$, l'impédance $Z_0 = R$.

Par suite $U = Z_0 I_0 = R I_0$, d'où $R = \frac{U}{I_0}$.

Comme I_0 est voisin de 1990 mA, prenons pour I_0 la valeur approchée 2 A, alors $R \simeq \frac{100}{2} \simeq 50\ \Omega$.

e) Pratiquement pour $C = 10\ \mu F$, il y a résonance.

— Aux bornes du condensateur d'impédance $\frac{1}{2\pi fC}$, la tension efficace est alors $\frac{I_0}{2\pi fC} = \frac{2}{2\pi \times 50 \times 10^{-5}} = 637$ V.

— Aux bornes de la bobine, de résistance négligeable donc d'impédance $2\pi fL$, la tension efficace est alors $2\pi fLI_0 = 635$ V.

Remarques :

— si nous étions parfaitement à la résonance les deux tensions seraient égales;

— les deux tensions sont nettement plus importantes que la tension $U = 100$ V aux bornes du circuit, on dit qu'il apparaît un phénomène de surtension aux bornes de la bobine et du condensateur à la résonance.

E 41. *(Circuit à* L *variable.)*

Un générateur délivre une tension alternative sinusoïdale $u_{AB} = U_m \sin \omega t$ *avec* $U_m = 100\sqrt{2}$ volts. *Il débite dans une portion* AB *de circuit-série comprenant un conducteur ohmique de résistance* $R = 20{,}0\ \Omega$, *un condensateur de capacité* $C = 20\ \mu F$ *et une bobine d'auto-inductance variable* L *et de résistance négligeable.*

a) *Donner l'expression littérale de l'impédance* Z *de la portion de circuit* AB.

b) *On fait varier* L *en maintenant constante* R, C, U_m *et* ω. *Lorsque la bobine a une auto-inductance* $L_1 = 0{,}50$ H *on constate que l'intensité efficace à la valeur la plus grande.*

α) *Calculer la fréquence* f *de la tension sinusoïdale.*

β) *Calculer l'intensité efficace* I *du courant traversant alors le circuit.*

c) *Faire le schéma d'un montage, utilisant un oscillographe bicourbe, permettant de détecter le passage de* L *par la valeur* L_1.

d) *Pour la valeur* $L_2 = 0{,}57$ H *de l'auto-inductance, calculer le déphasage algébrique* φ *de* u_{AB} *sur l'intensité instantanée* i. *Donner l'expression de l'intensité instantanée* i *du courant qui passe dans le circuit.*

Indiquer au moyen d'un schéma l'aspect de l'écran de l'oscillographe utilisé dans le montage proposé au c) *et calculer le rapport* $\frac{d}{\ell}$ (d *désignant l'écart minimal entre les deux courbes suivant l'axe des temps,* ℓ *désignant la longueur suivant laquelle s'étale un motif des courbes*).

(D'après bac)

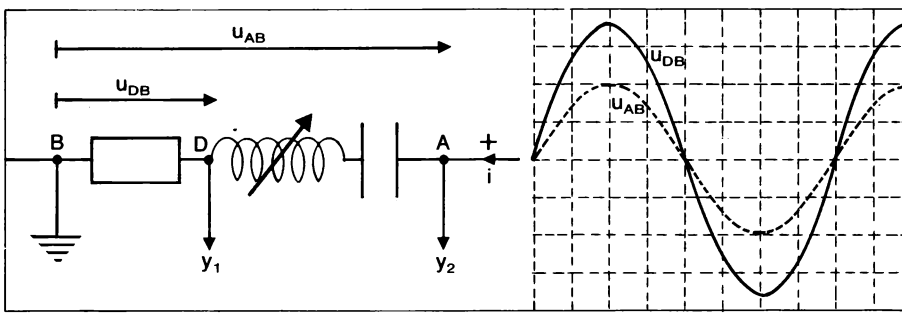
S 41. *a*) A partir de la loi d'Ohm instantanée $u_{AB} = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt$, on peut (à l'aide de la méthode des vecteurs de Fresnel ou à l'aide des nombres complexes) en déduire l'impédance du circuit pour la pulsation ω : $Z_{AB} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$.

b) α) En faisant varier l'auto-inductance L, on fait varier la pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ du circuit. Lorsque cette pulsation propre devient égale à la pulsation ω du générateur, il y a résonance d'intensité : alors I a sa valeur la plus grande, c'est ce qui est réalisé lorsque $L = L_1$.

Par suite L_1 est tel que $\omega = \frac{1}{\sqrt{L_1 C}}$ d'où $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C}} \simeq 50$ Hz.

β) A la résonance, l'impédance du circuit $Z = R$, d'où $I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{R} = \frac{U_m}{R\sqrt{2}} = 5$ A.

c) • Présentation de la démarche : nous allons exploiter le fait que lorsque L passe par sa valeur L_1, il y a résonance; alors le déphasage entre u_{AB} et i est nul; il suffit de visualiser sur l'écran les courbes représentant les variations de u_{AB} et i en fonction du temps et de détecter la valeur de L qui permet à ces courbes d'être en concordance de phase.



• Le sens + choisi pour mesurer i va de A vers B.
Aux bornes du résistor $u_{DB} = Ri$: sur la voie 1 est visualisée la courbe représentant i en fonction du temps (en trait continu sur l'oscillogramme).
Aux bornes du circuit, u_{AB} est visualisé sur la voie 2 (en pointillés sur l'oscillogramme).

Remarques concernant le schéma de montage :

— si vous utilisez des flèches pour indiquer u_{AB} (flèche de pointe A, de talon B) et u_{DB} : ces flèches doivent avoir le sens opposé au sens + choisi pour i;

— la flèche en travers de la bobine signifie que l'auto-inductance est réglable.

• Lorsque L passe par la valeur L_1 les deux courbes sont en phase (sont maximales aux mêmes instants, coupent l'axe des temps aux mêmes instants, sont minimales aux mêmes instants).

Remarque. Pour le montage proposé les sensibilités verticales sur les voies 1 et 2 sont différentes. En effet $U_{AB,\,m} = 100\sqrt{2}$ volts. D'autre part, puisqu'alors on est à la résonance, $I = \frac{U_{AB}}{R}$, donc $U_{DB} = RI = R\frac{U_{AB}}{R} = U_{AB}$: la tension maximale $U_{DB,\,m} = U_{AB,\,m}$. Si les sensibilités étaient égales les deux courbes seraient confondues.

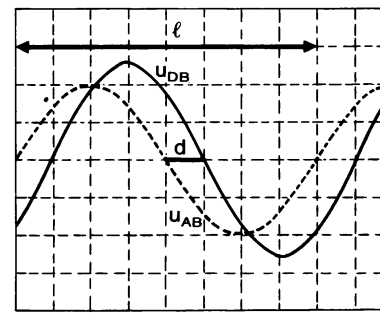
d) • Le déphasage de u_{AB} par rapport à i pour L_2 est donné en grandeur et en signe par $\text{tg}\,\varphi = \dfrac{L_2\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R} = 0{,}996$, d'où $\varphi = +0{,}78$ rad.

• Comme $u_{AB} = U_m \sin \omega t$, $i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$ en effet φ représente bien ainsi (phase de u_{AB} − phase de i).

Évaluons $I_m = \dfrac{U_m}{Z_{AB}} = \dfrac{100\sqrt{2}}{\sqrt{20^2 + \left(0{,}57 \times 100\pi - \dfrac{1}{2 \cdot 10^{-5} \times 100\pi}\right)^2}} = 5$ A.

D'où $i = 5 \sin(100\pi t - 0{,}78)$.

• Comme φ est positif, u_{AB} est en avance sur i donc sur $u_{DB} = Ri$ (« l'effet inductif » caractérisé par $L_2\omega$ l'emporte sur « l'effet capacitif » caractérisé par $\dfrac{1}{C\omega}$).



Par rapport à l'oscillogramme précédent la courbe représentant u_{AB} sur la voie 2 n'a pas été modifiée (en pointillés sur le schéma ci-contre).
La courbe représentant u_{DB} s'est aplatie (sa valeur maximale passe de $100\sqrt{2}$ à $RI_m = 20 \times 5 = 100$ V), et a glissé vers la droite de d.
La durée correspondant à d est l'écart temporel $\mathcal{C}$; la durée correspondant à ℓ est T :

$$\frac{d}{\ell} = \frac{\mathcal{C}}{T}. \qquad (1)$$

D'autre part $\mathcal{C} = \dfrac{\varphi}{\omega} = \dfrac{\varphi}{\dfrac{2\pi}{T}} = \dfrac{\varphi T}{2\pi}$, d'où :

$$\frac{\mathcal{C}}{T} = \frac{\varphi}{2\pi}. \qquad (2)$$

En comparant (1) et (2) : $\dfrac{d}{\ell} = \dfrac{\varphi}{2\pi} = \dfrac{0{,}78}{2\pi} = 0{,}124 \simeq \dfrac{1}{8}$.

E 42. *(Circuit à ω variable.)*
Un dipôle RLC *série est formé d'un résistor de résistance* R, *d'une bobine d'inductance* L *et de résistance négligeable et d'un condensateur de capacité* C. *Il est branché aux bornes d'un générateur qui délivre une tension alternative sinusoïdale de valeur efficace* U = 5 V, *de pulsation* ω *réglable. Il est parcouru par un courant d'intensité efficace* I.

a) α) *Établir l'équation différentielle qui fournit la valeur instantanée* u *aux bornes du dipôle.*

β) *En déduire l'expression de l'intensité efficace* I *du courant dans le circuit en fonction de* ω.

γ) *L'expérience a permis de tracer la courbe* $I = f(\omega)$ *représentée ci-après.*
En déduire la fréquence de résonance N_0, *l'intensité* I_0 *correspondante, la valeur de* R.

b) α) *Pour deux valeurs de la pulsation* ω_1 *et* $\omega_2 > \omega_1$, *l'intensité efficace* $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$,

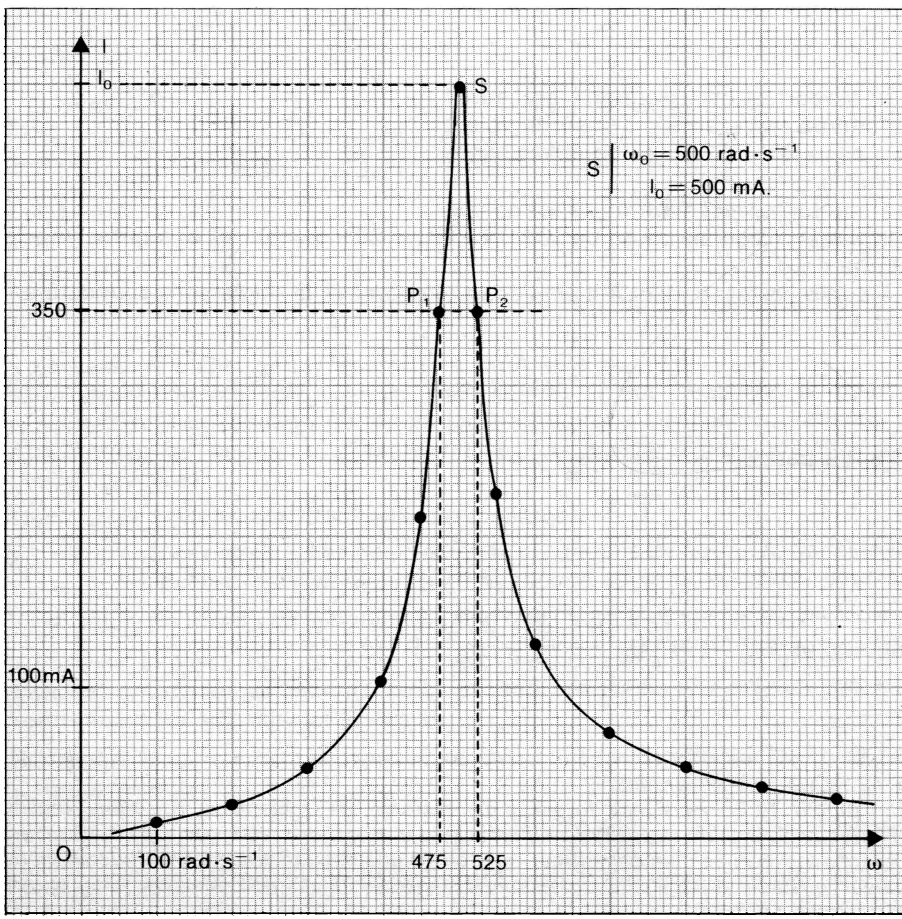
établir l'expression reliant $\omega_2 - \omega_1$ *à* R *et* L.
Comment s'appelle $\omega_2 - \omega_1$?

β) *A partir du graphique, relever* $\omega_2 - \omega_1$ *et en déduire* L *puis* C.

γ) *Qu'appelle-t-on « facteur de qualité* Q *du circuit », l'évaluer.*

c) *A la résonance d'intensité la tension efficace* U_C *aux bornes du condensateur s'exprime simplement en fonction de* U. *Quel autre nom peut-on donner à* Q?

(D'après bac)



S 42. *a*) α) Soit u_R, u_B, u_C les tensions instantanées aux bornes du résistor, de la bobine et du condensateur : $u = u_R + u_B + u_C = Ri + L\dfrac{di}{dt} + \dfrac{1}{C}\int idt$.

β) Posons $i = I_m \cos \omega t$.

Alors $u_R = RI_m \cos \omega t$

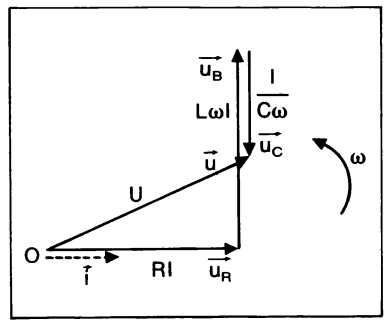
$u_B = L\omega I_m \cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ (revoir $\mathcal{M}$ 73).

$u_C = \dfrac{I_m}{C\omega} \cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right)$ (revoir $\mathcal{M}$ 73).

Associons aux fonctions sinusoïdales synchrones i, u_R, u_B, u_C et u les vecteurs de Fresnel $\vec{I}$, $\vec{u_R}$, $\vec{u_B}$, $\vec{u_C}$ et $\vec{u} = \vec{u_R} + \vec{u_B} + \vec{u_C}$.

Ces vecteurs sont représentés ci-contre,

en valeurs efficaces, on a supposé $L\omega I > \dfrac{I}{C\omega}$.



Dans le triangle rectangle :

$$U^2 = R^2 I^2 + \left(L\omega I - \frac{I}{C\omega}\right)^2,$$

d'où : $I = \dfrac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}$.

γ) • Lorsque ω passe par la valeur $\omega_0 = 500\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, il y a résonance d'intensité parce que l'intensité efficace I passe par sa valeur maximale $I_0 = 0{,}5$ A.

La fréquence de résonance $N_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = 79{,}6$ Hz.

• A la résonance, l'impédance du circuit $Z_0 = R$. Par suite :

$$Z_0 = R = \frac{U}{I_0} = \frac{5}{0{,}5} = 10\ \Omega.$$

b) α) • Cherchons les valeurs ω_1 et $\omega_2 > \omega_1$ telles que $I = \dfrac{I_0}{\sqrt{2}}$.

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{U}{R\sqrt{2}}.$$

Par suite $\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2} = R\sqrt{2}$.

Élevons au carré, on aboutit à $\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2 = R^2$ (1).

Cette équation (1) conduit à deux équations du second degré en ω.

— *Première équation :* $L\omega - \dfrac{1}{C\omega} = R$, soit après multiplication par $\omega \neq 0$,

$L\omega^2 - R\omega - \frac{1}{C} = 0$. Cette équation a deux racines de signes contraires, gardons la racine positive $\omega = \frac{R + \sqrt{R^2 + 4\frac{L}{C}}}{2L}$. (2)

— *Deuxième équation :* $L\omega - \frac{1}{C\omega} = R$. En changeant R en $-R$ dans (2), on obtient facilement son unique solution positive $\omega = \frac{-R + \sqrt{R^2 + 4\frac{L}{C}}}{2L}$. (3)

— La première solution (2) correspond à ω_2, la deuxième (3) à $\omega_1 < \omega_2$.

— Par suite $\omega_2 - \omega_1 = \frac{2R}{2L} = \frac{R}{L}$.

— La différence $(\omega_2 - \omega_1)$ s'appelle la largeur de bande exprimée en $rad \cdot s^{-1}$.

β) • Sur le graphique $I_0 = 500$ mA, $\frac{I_0}{\sqrt{2}} \simeq 350$ mA. Les points P_1 et P_2 indiqués sur la courbe ont donc pour ordonnées $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$, leurs abscisses sont respectivement $\omega_1 = 475$ rad·s^{-1} et $\omega_2 = 525$ rad·s^{-1}.

• Par suite $\omega_2 - \omega_1 = 525 - 475 = 50$ rad·s^{-1}.

• D'après $\omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$, $L = \frac{R}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{10}{50} = 0{,}2$ H.

• D'après la pulsation de résonance $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$:

$$C = \frac{1}{L\omega_0^2} = \frac{1}{0{,}2 \times 500^2} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ F} = 20 \text{ µF}.$$

γ) • Le rapport $\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0}$ s'appelle la largeur de bande passante relative, plus elle est faible plus le circuit est sélectif.

• Le facteur de qualité Q est l'inverse de la bande passante relative :

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_0}{\frac{R}{L}} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{0{,}2 \times 500}{10} = 10.$$

c) • L'impédance du condensateur à la résonance est $Z_C = \frac{1}{C\omega_0}$, la tension efficace entre ses bornes est $U_C = Z_C I_0 = \frac{I_0}{C\omega_0}$. (1)

• A la résonance $\frac{1}{C\omega_0} = L\omega_0$. (2)

• L'impédance du circuit à la résonance est égale à R, la tension efficace aux bornes du circuit est alors $U = RI_0$. (3)

• Faisons le rapport (1) sur (3) : $\frac{U_C}{U}=\frac{\frac{I_0}{C\omega_0}}{RI_0}=\frac{1}{RC\omega_0}$.

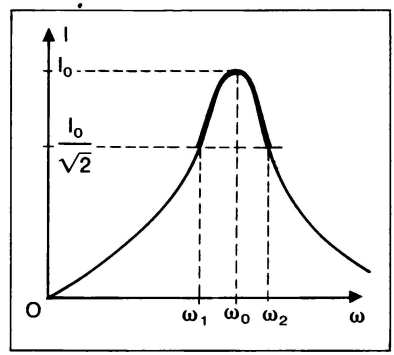
D'après (2) $\frac{U_C}{U}=\frac{L\omega_0}{R}$: on constate ainsi que $\frac{U_C}{U}$, à la résonance, est égal à Q. Le facteur de qualité Q s'appelle pour cette raison aussi le coefficient de surtension (en effet on se rend compte qu'à la résonance $\frac{U_C}{U}=10$, il apparaît une surtension aux bornes du condensateur).

• *Remarque.* Il apparaît aussi une surtension aux bornes de la bobine. Lorsque la bobine n'est pas résistante, à la résonance $U_B=U_C$, par suite dans ce cas $\frac{U_B}{U}$ est aussi égal à Q.

77 **Bande passante, facteur de qualité d'un circuit R, L, C série.**

• La réponse d'un circuit, par exemple caractérisée par l'intensité efficace du courant qui le traverse, dépend de la pulsation du générateur de tension alternative sinusoïdale qui l'excite.

• On convient de dire, en désignant par I_0 l'intensité à la résonance, que la réponse est « bonne » si $I \geqslant \frac{I_0}{\sqrt{2}}$; alors $\omega_1 \leqslant \omega \leqslant \omega_2$ (partie de courbe plus épaisse).



• On montre que $\omega_2-\omega_1=\frac{R}{L}$: c'est la *largeur de bande passante* en $rad \cdot s^{-1}$.

• Pour caractériser la sélectivité du circuit on introduit la *largeur de bande passante relative* $\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_0}=\frac{N_2-N_1}{N_0}$.

• Par définition, l'inverse de la bande passante relative est le *facteur de qualité* Q du circuit :

$$Q=\frac{\omega_0}{\omega_2-\omega_1}=\frac{L\omega_0}{R}=\frac{1}{RC\omega_0}.$$

• A la résonance, la tension efficace aux bornes du condensateur est Q fois celle de la tension aux bornes du circuit : pour cette raison Q s'appelle aussi le *facteur de surtension.* (Remarquons que si la bobine n'a pas de résistance, la tension efficace entre ses bornes à la résonance d'intensité est la même qu'aux bornes du condensateur.)

E 43. a) *Un circuit comprend une bobine résistante et inductive (résistance* r, *auto-inductance* L), *un conducteur ohmique de résistance* R, *un condensateur de capacité* C *montés en série. Il est alimenté par un générateur maintenant entre ses bornes une tension alternative sinusoïdale de valeur efficace* U *constante mais de fréquence réglable entre* 20 Hz *et* 200 Hz. *La valeur constante de* U *est* 6 V.
On fait varier N, *pour chaque valeur de* N *on relève la valeur de l'intensité efficace* I *du courant, on obtient la courbe* $\mathcal{C}$ *tracée en pointillés sur le graphe ci-dessous.*

α) • *En déduire la fréquence* N_0 *de résonance d'intensité.*

β) *Quelle est la valeur de la résistance totale* (R + r) *du circuit?*

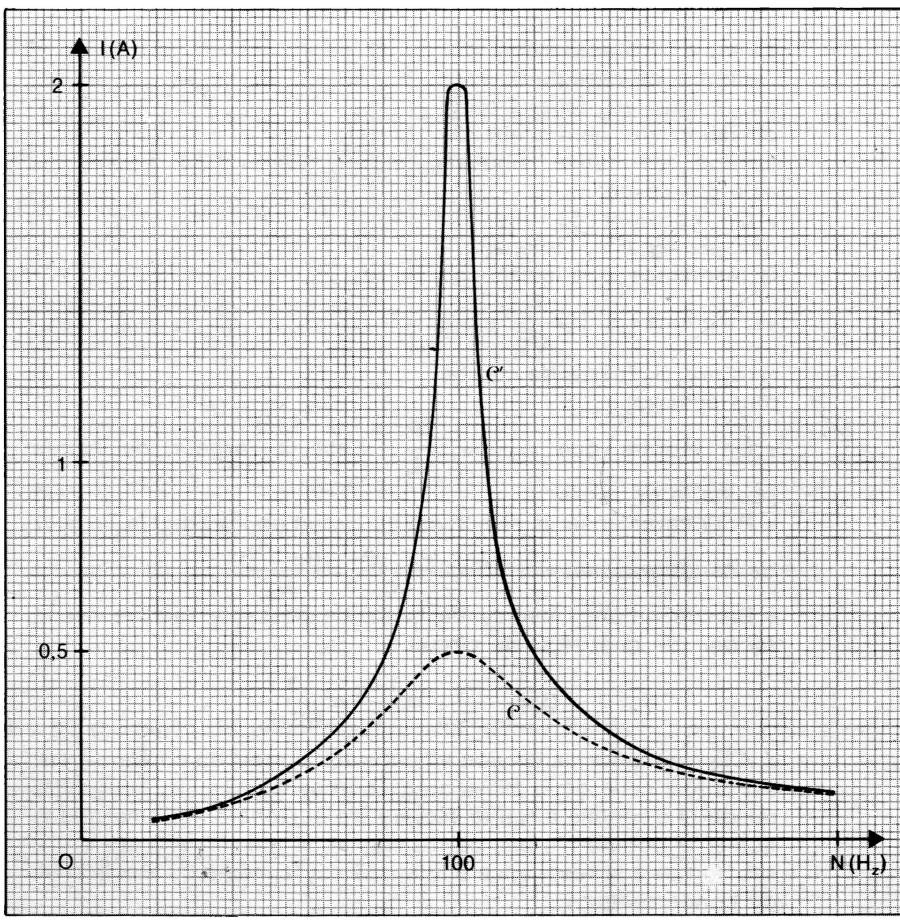
γ) *Mesurer sur le graphique la bande passante du circuit en fréquence.*

δ) *En déduire l'auto-inductance* L *de la bobine.*

ε) *Quel est le facteur de qualité* Q *du circuit?*

φ) *Quelle est la tension efficace aux bornes du condensateur à la résonance d'intensité?*

b) • *On recommence l'expérience après avoir retiré le résistor. On obtient la courbe de réponse en fréquence* $\mathcal{C}'$.



α) *Pourquoi la fréquence de résonance n'a-t-elle pas changé?*

β) *Quelle est la résistance* r *de la bobine? En déduire celle,* R, *du résistor qui a été utilisé dans la première expérience.*

γ) *A partir de* L *et de* r, *prévoir la largeur de la bande passante en fréquence. Vérifier sa valeur d'après le graphique.*

δ) • *Quel est le facteur de quantité* Q′ *de ce nouveau circuit?*

ε) *Quel est le circuit le plus sélectif?*

S 43. (Nous ne donnons que des indications et les réponses.)

a) α) $N_0 = 100$ Hz.

β) A la résonance $Z_0 = (R + r)$, $(R + r) = \frac{U}{I_0} = 12\ \Omega$.

γ) La bande passante correspond à la largeur de la «bosse» pour $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = 0{,}353$ A (0,353 A est représenté sur le graphique par 17,7 ≃ 18 mm). On relève que cette largeur est 19 mm sur le graphique, soit $(N_2 - N_1) = 38$ Hz.

δ) $\omega_2 - \omega_1 = \frac{R + r}{L}$ (voir ℳ 77), d'où $(N_2 - N_1) = \frac{R + r}{2\pi L}$, par suite :

$$L = \frac{R + r}{2\pi (N_2 - N_1)} \simeq 5 \cdot 10^{-2}\ \text{H}.$$

ε) $Q = \frac{N_0}{N_2 - N_1} \simeq 2{,}6$ $\left(\text{ou bien } Q = \frac{L 2\pi N_0}{R + r} \simeq 2{,}6\right)$.

φ) $\frac{U_c}{U} = Q$, d'où $U_c = QU = 15{,}6$ V.

b) α) Car L et C n'ont pas varié.

β) A la résonance $Z_0' = r$, d'où $r = \frac{U}{I_0'} = \frac{6}{2} = 3\ \Omega$. Donc $R = 9\ \Omega$.

γ) • $\omega_2' - \omega_1' = \frac{r}{L}$, d'où $N_2' - N_1' = \frac{r}{2\pi L} = 9{,}5$ Hz.

• La bande passante correspond à la largeur du pic pour $I = \frac{I_0'}{\sqrt{2}} = 1{,}41$ A (1,41 A est représenté sur le graphique par 7,1 cm). On relève que cette largeur est un peu moins de 5 mm sur le graphique, soit $(N_2' - N_1')$ un peu moins de 10 Hz.

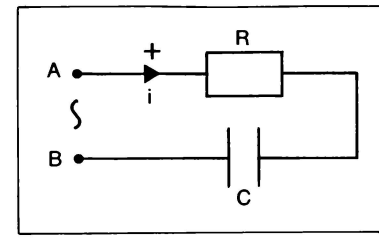
δ) $Q' = \frac{N_0'}{(N_2' - N_1')} = \frac{100}{9{,}5} = 10{,}5$.

ε) • Dans la deuxième expérience la résonance est aigue car la résistance totale du circuit ($r = 3\ \Omega$) est plus faible que dans la première expérience ($R + r = 12\ \Omega$).

• Le deuxième circuit est plus sélectif : il privilégie par sa réponse les fréquences autour de 100 Hz. Plus le facteur de qualité est grand plus le circuit est sélectif (mais plus il y a de surtension aux bornes du condensateur).

E 44. *Une prise maintient entre ses bornes* A *et* B *une tension alternative sinusoïdale* $u = U\sqrt{2}\cos\omega t$ *avec* $U = 20$ V *et* $\omega = 314$ rad·s^{-1}. *Entre* A *et* B *on branche un dipôle constitué d'un résistor de résistance* R *en série avec un condensateur de capacité* C.

Le courant alternatif sinusoïdal qui traverse le dipôle a pour intensité efficace $I = 2$ A, *la valeur absolue du déphasage entre* u *et* i *est* $|\varphi| = 60°$.



a) *Calculer la résistance* R *du résistor.*

b) *Calculer la capacité* C *du condensateur.*

c) α) *Donner l'expression en fonction du temps de la puissance électrique* p *reçue par le dipôle* AB.

β) *Tracer la courbe représentant* p *en fonction du temps.*

γ) *A quels instants le dipôle* AB *se comporte-t-il en récepteur de puissance? en générateur de puissance?*

δ) *Que représente la valeur moyenne de* p?

78 **Puissance électrique, énergie électrique.**

• **Puissance instantanée.**

Un dipôle AB parcouru par un courant d'intensité i, mesuré algébriquement suivant le sens + traversant le dipôle de A vers B, soumis à la tension u_{AB}, reçoit la puissance instantanée, mesurée en watts (W),

$$p = u_{AB} \cdot i.$$

Aux instants où $p > 0$, le dipôle fonctionne en récepteur de puissance; aux instants où $p < 0$, le dipôle fonctionne en générateur de puissance.

• **Puissance moyenne** reçue par un dipôle en régime alternatif sinusoïdal forcé. Soit T la période du courant, φ le déphasage de u_{AB} par rapport à i.

L'énergie reçue par le dipôle entre t et t + dt (dt, durée infiniment petite) est dW = pdt. L'énergie reçue au cours d'une période T est

$$W = \int_0^T p\,dt.$$

On appelle puissance moyenne le rapport $\mathcal{P} = \frac{W}{T} = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt.$

On démontre que $\mathcal{P} = UI \cos \varphi$.

Dans cette expression :
U est la tension efficace entre A et B;
I est l'intensité efficace du courant dans AB;
UI s'appelle la *puissance apparente* exprimée en voltampères (VA);
cos φ s'appelle le *facteur de puissance*.
La puissance moyenne $\mathcal{P}$ se mesure à l'aide d'un wattmètre.

• **Cas particuliers :**

— pour un dipôle (R, L, C) série, $\cos \varphi = \frac{R}{Z}$ d'où $\mathcal{P} = RI^2$: l'énergie électrique se dissipe uniquement par effet Joule;

— pour un condensateur, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ rad, le facteur de puissance $\cos \varphi = 0$, d'où $\mathcal{P} = 0$;

— pour une bobine de résistance négligeable, $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ rad, $\cos \varphi = 0$, d'où $\mathcal{P} = 0$.

• **Énergie électrique reçue.**
Pendant un temps t, multiple entier de la période T ou bien très supérieur à la période T, l'énergie électrique reçue par le dipôle est :

$$W = \mathcal{P}t = UI (\cos \varphi) \cdot t.$$

L'énergie consommée peut être mesurée à l'aide d'un compteur d'énergie électrique en général gradué en kilowattheure : $1 \text{ kWh} = 3{,}6 \cdot 10^6$ J.

S 44.

a) Réponse : $R = \frac{U \cos \varphi}{I} = 5\ \Omega$.

b) Réponse : $C = \frac{1}{R\omega |\text{tg } \varphi|} = 3{,}68 \cdot 10^{-4}$ F $\left(\text{ou bien } C = \frac{1}{\omega \sqrt{Z^2 - R^2}}\right)$.

c) α) Si on appelle φ le déphasage de u par rapport à i, lorsque l'origine des dates est telle que $u = U\sqrt{2} \cos \omega t$, alors $i = I\sqrt{2} \cos(\omega t - \varphi)$.

Pour un dipôle (R, C) en série, φ est négatif, donc ici $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ rad.

D'où les expressions de u, i et $p = ui$, en unités S.I. :

$$u = 20\sqrt{2} \cos 314\,t$$

$$i = 2\sqrt{2} \cos\left(314\,t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$p = 80 \cos 314\,t \cdot \cos\left(314\,t + \frac{\pi}{3}\right). \qquad (1)$$

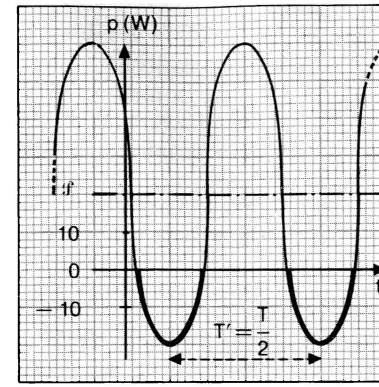
β) Pour tracer la courbe représentant les variations de p en fonction du temps il est commode de transformer l'expression (1) en utilisant la relation de trigonométrie :

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)].$$

Il s'ensuit :

$$p = 40\left[\cos\left(628t+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$p = 40\cos\left(628t+\frac{\pi}{3}\right)+20.$$



La puissance p est fonction sinusoïdale du temps, mais pas alternative car elle oscille autour de la valeur moyenne 20 W.

Sa pulsation $\omega' = 628 \text{ rad} \cdot s^{-1} = 2\omega$: par suite sa période $T' = \frac{2\pi}{\omega'}$ est égale à $\frac{T}{2}$.

(Pour $t = 0$, $p = 40$ W.)

γ) • Lorsque la puissance reçue est négative, c'est-à-dire aux instants correspondants aux parties de courbe en trait gras, le dipôle se comporte en générateur de puissance. (La puissance libérée par le condensateur qui se décharge est alors en valeur absolue supérieure à la puissance calorifique dissipée dans le résistor.)

• Lorsque la puissance reçue est positive, le dipôle se comporte en récepteur de puissance, c'est ce régime que le dipôle prend le plus longtemps.

δ) La valeur moyenne de p est 20 W, ce n'est autre que la puissance moyenne reçue sur le dipôle $\mathcal{P} = UI\cos\varphi = 20 \times 2 \times \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 20$ W.

E 45. *Un appareil électrique est alimenté par une tension alternative sinusoïdale de valeur efficace* $U = 220$ V, *de pulsation* $\omega = 100\pi \cdot \text{rad} \cdot s^{-1}$.

Cet appareil est assimilable à un dipôle de résistance $R = 10\ \Omega$ *et de réactance d'induction* $X = L\omega$.

Lorsqu'il reste branché pendant deux heures, on relève sur le compteur de l'installation une consommation de 0,89 kWh.

a) *Quelle est la puissance moyenne* $\mathcal{P}$ *consommée par l'appareil?*

b) *Quelle est l'intensité efficace du courant qui le traverse?*

c) *Quelle est sa puissance apparente?*

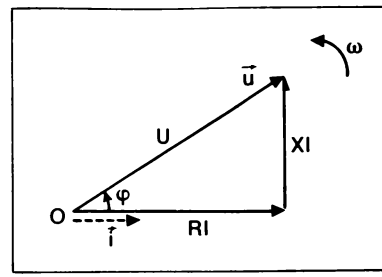
d) *Quelle est son facteur de puissance? Si l'on pose* $i = I_m \sin \omega t$, *quelle est l'expression de la tension instantanée entre ses bornes?*

e) *Quelle est la réactance d'induction* X?

S 45. *a*) La durée d'utilisation est grande devant la période T du courant, l'énergie consommée par le dipôle est $W = \mathcal{P}t$ en désignant par $\mathcal{P}$ la puissance moyenne reçue.

D'où $$\mathcal{P} = \frac{W}{t} = \frac{0{,}89 \times 3{,}6 \cdot 10^6}{2 \times 3600} = 445 \text{ W}.$$

b) L'appareil étant assimilé à un dipôle (R, L) en série, la puissance moyenne a aussi pour expression $\mathcal{P} = RI^2$, d'où $I = \sqrt{\frac{\mathcal{P}}{R}} = 6{,}67$ A.



c) La puissance apparente de l'appareil est $UI = 220 \times 6{,}67 = 1{,}47 \cdot 10^3$ VA.

d) • Le facteur de puissance cos φ peut être évalué à partir de l'expression de la puissance moyenne : $\mathcal{P} = UI \cos \varphi$, d'où $\cos \varphi = \frac{\mathcal{P}}{UI} = 0{,}303$.

• L'appareil étant inductif, la tension instantanée u entre ses bornes est en avance sur l'intensité i : le déphasage φ de u par rapport à i est positif.

D'après $\cos \varphi = 0{,}303$, on en déduit $\varphi = \pm 1{,}26$ rad. Compte tenu de la remarque précédente $\varphi = 1{,}26$ rad.

Si l'on pose $i = I_m \sin \omega t$, alors $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$. Vérifier bien que φ = (phase de u − phase de i).

D'où $$u = 220\sqrt{2} \sin(100\pi t + 1{,}26)$$
$$\simeq 311 \sin(314\,t + 1{,}26) \text{ en unités S.I.}$$

e) La réactance d'induction $X = L\omega$ est telle que $\text{tg } \varphi = \frac{X}{R}$, d'où :

$$X = R \text{ tg } \varphi = 31{,}1\ \Omega.$$

(On pouvait aussi utiliser $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$, d'où $X = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{\frac{U^2}{I^2} - R^2} =$ 31,4 Ω : la différence provient des approximations lors des calculs à trois chiffres significatifs.)

E 46. a) *Un moteur électrique est alimenté par une tension alternative sinusoïdale de valeur efficace* $U = 220$ V, *de pulsation* $\omega = 100\,\pi \cdot \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$. *Ce moteur consomme une puissance électrique moyenne* $\mathcal{P}_M = 700$ W, *il est alors traversé par un courant d'intensité efficace* $I = 4$ A.

α) *Quel est le facteur de puissance du moteur?*

β) *Quelle est l'impédance* Z_M *du moteur?*

γ) *La puissance calorifique dissipée par effet Joule est* 60 W. *Quelle est la résistance du moteur? Quelle est la puissance mécanique fournie?*

b) *On place en série avec le moteur un condensateur de capacité C telle que le facteur de puissance de l'association condensateur-moteur en série, toujours alimentée par une tension alternative sinusoïdale de valeur efficace* $U = 220$ V *et de pulsation* $\omega = 100\,\pi$ rad·s^{-1}, *soit égal à 1. Déterminer la capacité C, l'intensité efficace I′ du courant qui traverse l'association et la nouvelle puissance moyenne* $\mathcal{P}'_M$ *reçue par le moteur.*
On admettra que l'impédance Z_M *et le facteur de puissance du moteur restent inchangés.*

S 46. *a*) α) Réponse : $\cos\varphi = \dfrac{\mathcal{P}_M}{UI} = 0{,}795$.

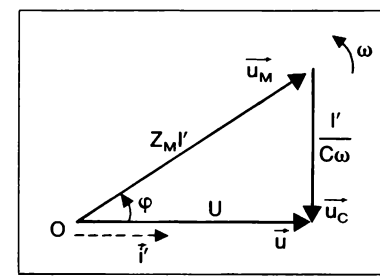
β) Réponse : $Z_M = \dfrac{U}{I} = 55\ \Omega$.

γ) • La puissance moyenne dissipée par effet Joule est $\mathcal{P}_{cal} = RI^2$, d'où $R = \dfrac{\mathcal{P}_{cal}}{I^2} = 3{,}75\ \Omega$.

• La puissance moyenne reçue par le moteur $\mathcal{P}_M = \mathcal{P}_{cal} + \mathcal{P}_{méc}$, par suite la puissance mécanique moyenne fournie par le moteur est :
$\mathcal{P}_{méc} = \mathcal{P}_M - \mathcal{P}_{cal} = 640$ W.

(Remarquons qu'un moteur n'est pas un simple dipôle (R, L) en série, on ne peut pas écrire que la puissance moyenne $\mathcal{P}_M$ est égale à RI^2, car en plus de la puissance calorifique il intervient une puissance mécanique.)

b) • Soit u, u_M et u_C les tensions instantanées respectivement aux bornes de l'association, du moteur et du condensateur : $u = u_M + u_C$.
Soit i′ l'intensité instantanée et I′ l'intensité efficace du courant.
Associons aux fonctions sinusoïdales du temps i′, u_M, u_C et u, les vecteurs de Fresnel $\vec{i}'$, $\vec{u}_M$, $\vec{u}_C$ et $\vec{u} = \vec{u}_M + \vec{u}_C$.



• Plaçons à priori le vecteur $\vec{i}'$. Expliquons comment placer $\vec{u}_M$, $\vec{u}_C$ et $\vec{u}$.
— Le facteur de puissance du moteur étant inchangé, le déphasage de u_M par rapport à i′ est l'angle φ, positif car le déphasage dans le moteur provient d'un effet inductif dû à des bobinages, tel que $\cos\varphi = 0{,}795$. Par suite $\varphi = +0{,}652$ rad.
La tension efficace U'_M aux bornes du moteur est $U'_M = Z_M I'$.
Avec ces renseignements, on peut ainsi construire $\vec{u}_M$ à partir de $\vec{i}'$.
— Aux bornes du condensateur $u_C = \dfrac{1}{C}\int i'\,dt$: le vecteur $\vec{u}_C$ a pour valeur efficace $U_C = Z_C I' = \dfrac{I'}{C\omega}$, il est en quadrature retard avec i′ $\left(\text{l'angle } (\vec{i}', \vec{u}_C) = -\dfrac{\pi}{2}\text{ rad}\right)$. On peut ainsi construire $\vec{u}_C$ représenté à partir de l'extrémité de $\vec{u}_M$.

— Le vecteur de Fresnel $\vec{u} = \vec{u_M} + \vec{u_C}$ doit se retrouver en phase avec $\vec{i'}$ puisque le facteur de puissance de l'association est égal à 1 (en effet si $\cos(\vec{i'}, \vec{u}) = 1$ $(\vec{i'}, \vec{u}) = 0$), il a pour valeur efficace U = 220 V.

• Calcul de C. Dans le triangle rectangle dessiné : $\sin\varphi = \dfrac{\dfrac{I'}{C\omega}}{Z_M I'} = \dfrac{1}{C\omega Z_M}$, d'où :

$$C = \frac{1}{\omega Z_M \sin\varphi} = 9{,}54 \cdot 10^{-5} \text{ F}.$$

• Calcul de I'. Dans le même triangle :

$\cos\varphi = \dfrac{U}{Z_M I'}$, d'où $I' = \dfrac{U}{Z_M \cos\varphi} = 5{,}03$ A.

• Calcul de $\mathcal{P}'_M$. La puissance moyenne reçue par le moteur est, en posant $U'_M = Z_M I'$,

$$\mathcal{P}'_M = U'_M I' \cos(\vec{i'}, \vec{u_M}) = Z_M I'^2 \cos\varphi = 1\,106 \text{ W}.$$

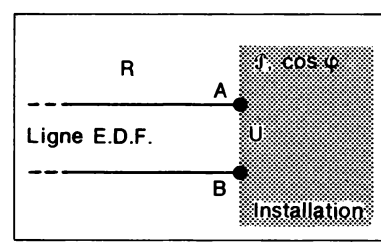
• *Remarques :*

— Comme la puissance moyenne consommée par le condensateur est nulle, la puissance moyenne de l'association est égale à la puissance moyenne du moteur : $\mathcal{P}'_M = \mathcal{P}' = UI' \cos(\vec{i'}, \vec{u})$.

D'où $\mathcal{P}'_M = 220 \times 5{,}03 \times 1 = 1\,107$ W.

— Le moteur n'a plus dans cette deuxième expérience le même état de fonctionnement que dans la question *a*). Pour réaliser une association de facteur de puissance égal à 1 ne modifiant pas l'état de fonctionnement du moteur, il aurait fallu mettre un condensateur de capacité C bien choisie en dérivation aux bornes du moteur et non pas en série.

E 47. *A partir d'un transformateur de distribution, une ligne EDF de résistance* R = 0,6 Ω *alimente une installation domestique de bornes* A *et* B. *Un compteur électrique est branché entre* A *et* B. *On appelle* U *la tension efficace aux bornes du compteur,* cos φ *le facteur de puissance de l'installation,* $\mathcal{P}$ *la puissance électrique moyenne consommée.*



a) $\mathcal{P}$ = 10 kW, cos φ = 0,96, *évaluer la puissance moyenne calorifique perdue dans la ligne EDF lorsque* U = 110 V *et lorsque* U = 220 V. *Conclure.*

b) U = 220 V, $\mathcal{P}$ = 10 kW *évaluer la puissance moyenne calorifique perdue en ligne lorsque :*

α) *l'appareil branché entre* A *et* B *est un radiateur électrique;*

β) *l'appareil branché est un dipôle résistant et inductif de facteur de puissance* cos' φ = 0,55. *Conclure.*

S 47. *a*) Déterminer l'intensité efficace du courant débité, d'après $\mathcal{P} = UI \cos \varphi$, $I = \dfrac{\mathcal{P}}{U \cos \varphi}$.

La puissance calorifique moyenne perdue en ligne est $\mathcal{P}_{cal} = RI^2 = R \dfrac{\mathcal{P}^2}{U^2 \cos^2 \varphi}$.

• Application numérique :

— pour $U = 110$ V, $\mathcal{P}_{cal} = \dfrac{0{,}6 \times (10^4)^2}{110^2 \times 0{,}96^2} = 5{,}38 \cdot 10^3$ W;

— pour $U' = 220$ V, $\mathcal{P}'_{cal} = 1{,}34 \cdot 10^3$ W $= \dfrac{\mathcal{P}_{cal}}{4}$.

• Conclusion : en distribuant l'électricité sous la tension efficace $U' = 220$ V au lieu de la distribuer sous la tension efficace $U = 110$ V initialement utilisée, l'EDF divise par 4 les pertes d'énergie dans les lignes reliant les transformations de distribution aux installations domestiques.

Note : pour les raisons développées ci-dessus, on a intérêt pour les transports d'énergie électrique « longue distance » à utiliser une tension efficace très élevée (400 000 V), un jeu de transformateurs abaisse ensuite cette tension à 20 000 V pour le primaire du transformateur de distribution dont le secondaire est sous 220 V.

b) • Présentation de la démarche : la puissance calorifique moyenne perdue en ligne a toujours pour expression $\mathcal{P}_{cal} = R \dfrac{\mathcal{P}^2}{U^2 \cos^2 \varphi}$; cette fois-ci l'EDF « vend » la puissance $\mathcal{P}$ sous la tension U mais avec des facteurs de puissance différents $\cos \varphi$ et $\cos' \varphi$ que nous allons préciser.

α) Le radiateur électrique est un dipôle pratiquement purement résistif, le déphasage entre la tension instantanée u et l'intensité instantanée i est pratiquement nul, le facteur de puissance $\cos \varphi \simeq 1$.

D'où $$\mathcal{P}_{cal} = \frac{0{,}6 \times (10^4)^2}{220^2 \times 1^2} = 1{,}24 \cdot 10^3 \text{ W}.$$

β) Pour le dipôle résistant et inductif de facteur de puissance $\cos' \varphi = 0{,}55$,

$$\mathcal{P}'_{cal} = \frac{0{,}6 \times (10^4)^2}{220^2 \times (0{,}55)^2} = 4{,}1 \cdot 10^3 \text{ W}.$$

• Conclusion : dans les deux expériences α) et β), l'EDF vend la même puissance électrique moyenne (donc pendant la même durée t, la même énergie électrique $W = \mathcal{P}t$); lorsque le facteur de puissance de l'installation est faible, la puissance calorifique perdue en ligne est plus grande.
On comprend pourquoi l'EDF pénalise les installations de $\cos \varphi$ trop faible.

E 48. *Un dipôle* AB *est constitué par un conducteur ohmique* R, *une bobine purement inductive d'auto-inductance* $L = 0{,}1$ H *et un condensateur de capacité* C *disposés en série. On applique entre* A *et* B *une tension alternative sinusoïdale de valeur efficace constante* $U = 50$ V *mais de pulsation* ω *réglable. Un wattmètre mesure la puissance électrique moyenne consommée par le dipôle* AB.

a) *En faisant varier* ω, *on constate que la puissance électrique moyenne passe par la valeur maximale* $\mathcal{P}_0 = 250$ W *pour* $\omega_0 = 300$ rad·s^{-1}. *En déduire les valeurs de* R *et* C.

b) *On constate que pour deux valeurs* ω_1 *et* $\omega_2 > \omega_1$, *de la pulsation, la puissance moyenne est égale à* $\frac{\mathcal{P}_0}{2}$. *Évaluer* $\omega_2 - \omega_1$. *Que représente* $\frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$?

c) *Quels sont les déphasages de la tension instantanée* u *aux bornes de* AB *par rapport à l'intensité instantanée* i *pour* ω_0, ω_1 *et* ω_2?

S 48. *a*) • La puissance électrique moyenne consommée dans un dipôle (R, L, C) série a pour expression $\mathcal{P} = UI \cos \varphi$. Comme $\cos \varphi = \frac{R}{Z}$, $\mathcal{P} = UI \frac{R}{Z}$.

De plus comme $Z = \frac{U}{I}$, finalement $\mathcal{P} = RI^2$ (expression évidente qui traduit que seul la conduction ohmique consomme de l'énergie électrique qu'il dissipe par effet Joule).

• D'après $\mathcal{P} = RI^2$, la puissance moyenne passe par sa valeur maximale $\mathcal{P}_0$, lorsque l'intensité efficace passe par sa valeur la plus grande I_0 : c'est-à-dire lorsqu'il y a résonance d'intensité.

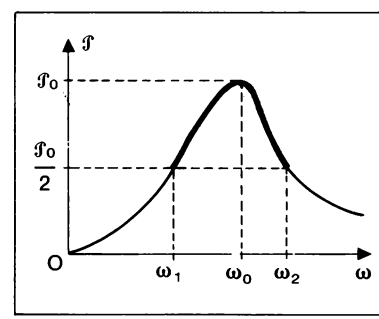
— A la résonance, l'impédance du dipôle AB est égale à $Z_0 = R$, d'où $U = Z_0 I_0 = RI_0$ et par suite $I_0 = \frac{U}{R}$. La puissance moyenne a alors pour expression, à la résonance insistons bien là-dessus, $\mathcal{P}_0 = RI_0^2 = R \frac{U^2}{R^2} = \frac{U^2}{R}$.

On en déduit $R = \frac{U^2}{\mathcal{P}_0} = \frac{50^2}{250} = 10\ \Omega$.

— A la résonance $L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0}$, d'où $C = \frac{1}{L\omega_0^2} = 1{,}11 \cdot 10^{-4}$ F.

b) • Pour les pulsations ω_1 et ω_2, $\mathcal{P} = \frac{\mathcal{P}_0}{2}$, c'est-à-dire $RI^2 = \frac{RI_0^2}{2}$ soit $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$.

On sait (revoir ℳ 77) que la bande passante est telle que l'intensité efficace soit supérieure ou égale à $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$: les deux valeurs ω_1 et ω_2 correspondent aux limites inférieure et supérieure de la bande passante.



(On s'aperçoit ainsi que la convention est : la réponse du circuit est bonne si $\mathcal{P} \geqslant \frac{\mathcal{P}_0}{2}$.)

• La largeur de la bande passante en rad·s^{-1} est $\omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} = \frac{10}{0{,}1} = 100$ rad·s^{-1}.

• Le rapport $\frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$, inverse de la bande passante relative, est le facteur de qualité Q du circuit : $Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{300}{100} = 3$.

c) • A la résonance, pour la pulsation ω_0, u et i sont en phase : $\varphi = 0$.

• Pour ω_1 et ω_2, $\mathcal{P} = \frac{\mathcal{P}_0}{2}$. Utilisons l'expression de $\mathcal{P}$ faisant intervenir le facteur de puissance : $UI \cos\varphi = \frac{UI_0}{2}$.

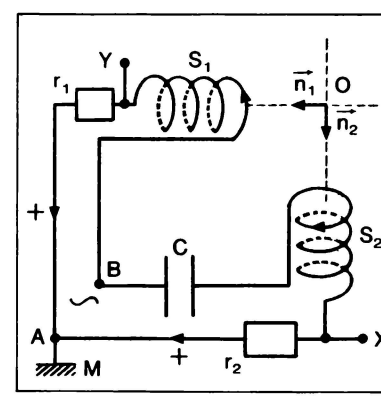
Soit $\cos\varphi = \frac{I_0}{2I}$. Comme alors $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$, il s'ensuit que $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\varphi = \pm\frac{\pi}{4}$ rad.

Déterminons quelle valeur correspond à ω_1, quelle valeur correspond à ω_2? Lorsque ω augmente « l'effet inductif » caractérisé par $L\omega$ augmente, « l'effet capacitif » caractérisé par $\frac{1}{C\omega}$ diminue. A la résonance ces effets se compensent.

Pour $\omega_1 < \omega_0$, « l'effet capacitif » l'emporte : alors d'après $\text{tg}\,\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$, φ est négatif. Par suite pour ω_1, $\varphi_1 = -\frac{\pi}{4}$ rad : la tension u est en retard sur i.

Pour ω_2, « l'effet inductif » l'emporte : $\varphi_2 = +\frac{\pi}{4}$ rad, la tension u est en avance sur i.

E 49. *(Champ magnétique tournant.)*
Deux solénoïdes S_1 *et* S_2 *identiques, de résistance* R, *d'auto-indutance* L, *ont leurs axes perpendiculaires.*
Le point O *d'intersection de ces axes est à la même distance des deux bobines.*



a) *Le solénoïde* S_1 *est placé, en série avec un résistor de résistance* $r_1 = 40\ \Omega$, *aux bornes d'une prise* AB *maintenant une tension* u_{AB} *dont l'expression est, en choisissant convenablement l'origine des temps,* $u_{AB} = 220\sqrt{2}\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$ *en unités* S.I.
Déterminer R *et* L *sachant que ce circuit est parcouru par le courant d'intensité* $i_1 = 0{,}5\sqrt{2}\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$ *en unités* S.I.

b) *Le solénoïde* S_2 *est placé, en série avec un résistor de résistance* $r_2 = 40\ \Omega$ *et avec un*

condensateur de capacité C, *aux bornes de la même prise* AB $\left($*c'est-à-dire maintenant la même tension* $u_{AB}=220\sqrt{2}\left(\cos 100\,\pi t-\frac{\pi}{4}\right)\right)$. *Déterminer* C *sachant que ce circuit est parcouru par le courant d'intensité* $i_2=0{,}5\sqrt{2}\cos 100\,\pi t$ en unités S.I.

c) *On relie* A *à la masse d'un oscillographe, la borne située entre* r_1 *et* S_1 *à l'entrée de la voie* Y *de déviation verticale, la borne située entre* r_2 *et* S_2 *à l'entrée de la voie* X *de déviation horizontale.*
Pour ces deux voies les sensibilités sont égales et telles que le spot dévie de 0,1 cm *pour* 1 V.
Montrer que le spot décrit un cercle et calculer son rayon.

d) *On admet que le champ magnétique en* O *dû à* S_1 *est colinéaire avec* $\vec{n_1}$, *et que son module* $B_1=k|i_1|$. *De même le champ magnétique dû à* S_2 *est colinéaire avec* $\vec{n_2}$, *de module* $B_2=k|i_2|$. (*Le coefficient de proportionnalité* k, *positif, est le même pour les deux solénoïdes,* $\vec{n_1}$ *est le vecteur unitaire normal aux spires de* S_1 *orientées suivant le sens + indiqué,* $\vec{n_2}$ *est le vecteur unitaire normal aux spires de* S_2.)

α) *Déterminer les expressions de* $\vec{B_1}$ *en fonction de* k, t *et* $\vec{n_1}$, *de* $\vec{B_2}$ *en fonction de* k, t *et* $\vec{n_2}$.

β) *En déduire que le champ magnétique* $\vec{B}$ *résultant en* O *a un module indépendant du temps et qu'il tourne autour de* O, *en restant dans le plan* $(\vec{n_1}, O, \vec{n_2})$ *à vitesse angulaire constante.*

S 49. *a)* • Le déphasage φ_1 de u_{AB} par rapport à i_1 est

$$\varphi_1=\left(100\,\pi t-\frac{\pi}{4}\right)-\left(100\,\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}\text{ rad.}$$

D'après $\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{L\omega}{r_1+R}$, $L\omega=(r_1+R)\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$ d'où $L=\frac{r_1+R}{\omega}$ (1).

• L'intensité efficace $I_1=0{,}5\text{ A}=\frac{U_{AB}}{Z_1}$ d'où $Z_1=\frac{U_{AB}}{I_1}=440\ \Omega$.

Comme $\cos\varphi_1=\frac{r_1+R}{Z_1}$, $r_1+R=Z_1\cos\frac{\pi}{4}=311\ \Omega$ d'où $R=271\ \Omega$

En reportant dans (1) : $L=0{,}99$ H.

b) Le déphasage φ_2 de u_{AB} par rapport à i_2 est $\varphi_2=\left(100\,\pi t-\frac{\pi}{4}\right)-(100\,\pi t)=-\frac{\pi}{4}$ rad.

D'après $\operatorname{tg}\varphi_2=\frac{L\omega-\frac{1}{C\omega}}{r_2+R}$, $L\omega-\frac{1}{C\omega}=-(r_2+R)$, d'où $\frac{1}{C\omega}=L\omega+r_2+R$ et $C=5{,}12\cdot10^{-6}$ F.

Remarque : $\cos\varphi_2=\frac{R+r_2}{Z_2}$, $Z_2=Z_1$ puisque $\cos\varphi_2=\cos\varphi_1$ et $r_2=r_1$: il est donc normal que $I_2=I_1=0{,}5$ A.

c) • La déviation verticale du spot, Y, est proportionnelle à $V_Y - V_M = r_1 i_1$:

$$Y = K r_1 i_1 \quad \text{avec} \quad K = 0{,}1 \text{ cm} \cdot V^{-1}.$$

Numériquement : $Y = 0{,}1 \times 40 \times 0{,}5 \sqrt{2} \cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{2} \sin 100\pi t$

avec Y en cm et t en s.

• La déviation horizontale du spot, X, est égale à $X = K r_2 i_2$, soit avec les mêmes unités cm et s : $X = 2\sqrt{2} \cos 100\pi t$.

• A chaque instant les coordonnées du spot sont :

$$\begin{cases} X = 2\sqrt{2} \cos 100\pi t \\ Y = 2\sqrt{2} \sin 100\pi t. \end{cases}$$

Pour obtenir l'équation cartésienne de la trajectoire décrite par le spot, il suffit d'éliminer t entre X et Y :

$$\cos 100\pi t = \frac{X}{2\sqrt{2}} \qquad (1)$$

$$\sin 100\pi t = \frac{Y}{2\sqrt{2}} \qquad (2)$$

Élevons (1) au carré, (2) au carré et ajoutons : $1 = \frac{X^2}{8} + \frac{Y^2}{8}$, soit $X^2 + Y^2 = 8$.

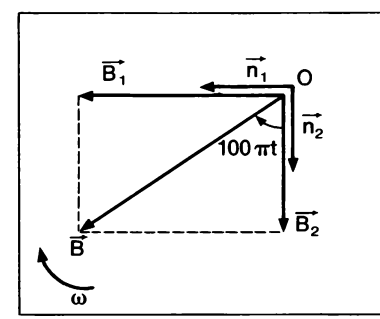
La trajectoire est donc un cercle ayant pour centre le point (X = 0, Y = 0) et de rayon $\sqrt{8} = 2{,}83$ cm.

d) *α)* Lorsque $i_1 > 0$, $\vec{B_1}$ a le sens de $\vec{n_1}$; lorsque $i_1 < 0$, $\vec{B_1}$ a le sens opposé à $\vec{n_1}$; par suite $\vec{B_1} = k i_1 \vec{n_1} = k \times 0{,}5\sqrt{2} \sin(100\pi t)\, \vec{n_1}$.
De même $\vec{B_2} = k \times 0{,}5\sqrt{2} \cos(100\pi t)\, \vec{n_2}$.

β) • $\vec{B} = \vec{B_1} + \vec{B_2}$ a pour coordonnées :
— suivant $\vec{n_1}$: $\overline{B_1} = k \times 0{,}5\sqrt{2} \sin 100\pi t$;
— suivant $\vec{n_2}$: $\overline{B_2} = k \times 0{,}5\sqrt{2} \cos 100\pi t$.

• Son module $B = \sqrt{\overline{B_1}^2 + \overline{B_2}^2} = k \times 0{,}5\sqrt{2}$: il est indépendant du temps.

• A l'instant t, le vecteur $\vec{B}$ fait avec $\vec{n_2}$, l'angle $(\vec{n_2}, \vec{B}) = 100\pi t$ (vérifier : $\overline{B_2}$ et $\overline{B_1}$ ont bien alors les expressions ci-dessus). Cet angle est fonction linéaire du temps t. Le vecteur $\vec{B}$ tourne donc à la vitesse angulaire constante $\omega = 100\pi \text{ rad} \cdot s^{-1}$: on a réalisé un champ magnétique tournant.



POURQUOI ?

• *Pourquoi dit-on tension alternative sinusoïdale et non pas tension sinusoïdale?*

C'est pour insister sur le fait que la tension oscille sinusoïdalement autour de la valeur zéro.

Est-ce qu'il est impératif d'utiliser les vecteurs de Fresnel?

Non on peut utiliser la méthode où intensités et tensions instantanées sont représentées par des nombres complexes. Si nous avons choisi la méthode de Fresnel c'est qu'elle est plus simple en particulier pour concrétiser les déphasages et que de ce fait c'est la méthode la plus utilisée par les professeurs, niveau classes de terminale.
Remarquons que le vecteur de Fresnel $\overrightarrow{OM}$ associé à la grandeur $x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ apparaît comme l'image du nombre complexe :

$$X_m \cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)$$

dont la partie réelle est x. (En physique on pose $j^2 = -1$ car la lettre i est utilisée pour l'intensité instantanée.) Il y a donc des liens entre les deux méthodes.

Est-ce que $U_{BA} = U_{AB}$, $Z_{AB} = Z_{BA}$?

La tension efficace entre deux points A et B est une grandeur positive, on peut la noter indifféremment U_{AB} ou U_{BA}.
Il en est de même pour l'impédance : $Z_{AB} = Z_{BA}$.
Mais attention la tension instantanée u_{AB} est une grandeur algébrique : $u_{AB} = -u_{BA}$.

A la résonance d'intensité j'ai écrit d'emblée $U = RI$, *mon professeur a noté «en êtes vous certain?», pourquoi?*

C'est pour vous évitez d'appliquer sans réfléchir la formule $U_{AB} = RI$ que votre professeur vous a mis en garde. Le réflexe à acquérir c'est d'appliquer d'abord la formule générale $U_{AB} = Z_{AB}\, I$ puis éventuellement de montrer que Z_{AB}, dans certains cas, se confond avec R.

Pourquoi cos φ *ne permet-il pas d'en déduire le déphasage de* u *par rapport à* i *en grandeur et en signe, mais simplement* $|\varphi|$?

Prenons un exemple. Si $\cos\varphi = 0{,}5$, il existe deux angles φ aigus $\varphi = +\frac{\pi}{3}$ rad et $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ rad qui ont pour cosinus 0,5.

Dans un énoncé on précisait «à la résonance l'intensité efficace passe par un maximum 3 A », *j'ai écrit* $I_m = 3$ A *en confondant avec l'intensité maximale. Évidemment j'ai eu tout faux. Ne pourrait-on pas changer de nom pour* I_m?

Tirons d'abord pour tout le monde la leçon de votre erreur. Dire que I passe par la valeur maximale 3 A ne doit surtout pas être noté $I_m = 3$ A car vous risquez de confondre intensité efficace maximale et intensité maximale. En général on note I_0 cette intensité efficace maximale (à laquelle correspond « l'intensité maximale » maximale $I_{m,0} = I_0\sqrt{2}$).
Pour répondre à votre question il y a un autre nom pour l'intensité maximale I_m c'est « intensité de crête ». Ce nom, peu utilisé, vous aurait évité l'erreur!

Pourquoi précisez-vous « résonance d'intensité »?

Pour caractériser la réponse d'un circuit en régime oscillatoire forcé on détermine la plupart du temps l'intensité efficace I du courant qui traverse le circuit. Alors lorsque I est maximale, on dit qu'il y a résonance d'intensité.
On pourrait caractériser la réponse par une autre grandeur physique, par exemple par la tension efficace aux bornes du condensateur. Dans ce cas la résonance, c'est-à-dire le passage par la plus grande valeur de la tension efficace aux bornes du condensateur, n'aurait pas lieu pour la même pulsation.
Retenez que dans tous les problèmes, lorsqu'on parle de résonance sans préciser, il s'agit de résonance d'intensité.

Est-ce que la bande passante s'étale symétriquement par rapport à la fréquence de résonance?

Non, la courbe de réponse, dont le sommet correspond à la résonance, n'admet pas un axe de symétrie passant par son sommet et perpendiculaire à l'axe des fréquences.

Lorsqu'on fait tendre la fréquence N *vers zéro (ou la pulsation* ω *vers zéro) est-ce que cela signifie que l'on tend vers un courant continu?*

Oui, partons de l'expression de la période $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Lorsque $\omega \longrightarrow 0$, $T \longrightarrow \infty$. La tension varie infiniment lentement, donc tend vers une tension constante. Ainsi pour un condensateur d'inpédance $Z = \frac{1}{C\omega}$, lorsque $\omega \longrightarrow 0$, $Z \longrightarrow \infty$: on retrouve, à la limite, qu'un condensateur arrête un courant continu en régime permanent.

Un dipôle a-t-il une impédance Z *déterminée?*

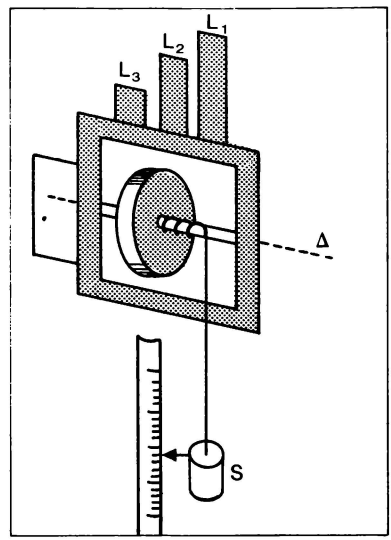
Non, dans le cas général l'impédance dépend de la fréquence de la tension excitatrice. On devrait systématiquement dire « l'inpédance du dipôle pour telle fréquence est ... ». Profitons-en pour préciser que les lois données dans ce chapitre ne sont valables que pour des courants dits « basse-fréquence » (c'est-à-dire de fréquence inférieure à quelques dizaines de kilohertz).

Est-ce que dans un conducteur ohmique, alimenté en courant alternatif sinusoïdal, la puissance consommée est constante?

Non la puissance instantanée $p = Ri^2$ varie avec i : elle est maximale lorsque $|i|$ est maximale, nulle lorsque $i = 0$, ... La puissance $\mathcal{P} = RI^2$ représente la puissance moyenne. Nous voyons qu'elle est la même que si le conducteur ohmique était parcouru par un courant continu d'intensité égale à l'intensité efficace I.

4 OSCILLATIONS MÉCANIQUES FORCÉES

E 50. *Un petit volant est mobile autour d'un axe horizontal* Δ. *Le centre d'inertie du volant n'est pas situé sur* Δ. *De ce fait, lors de la rotation du volant, des secousses sont données au bâti et transmises à trois lames élastiques* L_1, L_2 *et* L_3.



a) *Le volant est immobile.*
On approche successivement des trois lames L_1, L_2 *et* L_3 *un petit électroaimant alimenté pour un courant alternatif sinusoïdal de fréquence* $N_C = 50$ Hz. *On constate que seule la lame* L_3 *vibre avec une grande amplitude. En déduire une valeur approchée de la fréquence de* L_3.
Note : les lames sont en fer pur et sont attirées par la face de l'électroaimant que celle-ci soit une face nord ou une face sud.

b) *Le volant est mis en mouvement grâce à un solide* S *accroché à un fil souple qui s'enroule sur l'arbre d'axe* Δ. *Les lames, le volant et* S *sont immobiles. A la date* $t = 0$, *on laisse tomber* S *qui part ainsi, sans vitesse initiale, de la position* S_0 *repérée par* $x = 0$ *sur une règle verticale. Le rayon de l'arbre du volant est* $r = 10^{-2}$ m.

Le tableau suivant indique quelques valeurs de x *et de* t, *en particulier celles correspondant à l'entrée en résonance des lames* L_1, L_2 *et* L_3.

x (mm)	t (ms)	*Lame qui entre en résonance*
0	0	
22	92	L_1
155	246	L_2
637	500	
967	616	L_3
1 100	657	

α) *Vérifier que le mouvement de* S *est de translation rectiligne uniformément accélérée. En déduire son accélération* a.

β) *Montrer que la fréquence de rotation du volant, en* $tr \cdot s^{-1}$, *est* $N_V = \frac{a}{2\pi r} t$ *(sinon admettre cette expression).*

γ) *Vérifier en étudiant la résonance de* L_3 *que le volant communique au bâti deux impulsions par tour.*

δ) *En déduire les valeurs approchées des fréquences propres de* L_1 *et* L_2.

79 Réponse d'un oscillateur en régime d'oscillations forcées.

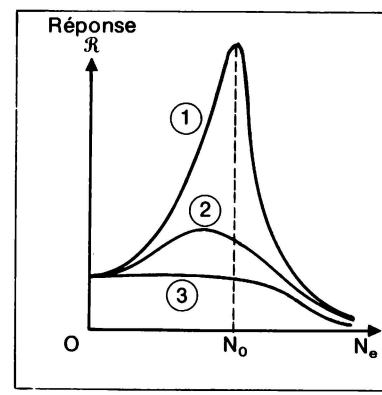
• Soit un *oscillateur* (pendule pesant, bateau, pont suspendu, voiture, tôle, ...) de fréquence propre N_0. Cet oscillateur oscillant librement est plus ou moins amorti.

• Un *excitateur* fait subir à l'oscillateur des oscillations forcées.

Si la fréquence N_e de l'excitateur n'est pas très supérieure à N_0, on constate que **l'oscillateur se met à vibrer à la fréquence N_e de l'excitateur.**

• La réponse $\mathcal{R}$ de l'oscillateur dépend de la fréquence N_e et de l'amortissement de l'oscillateur.

— Si l'amortissement de l'oscillateur est faible, la réponse passe par un maximum très accusé lorsque **N_e est voisin ou égal à N_0** (cela dépend de la grandeur prise pour caractériser la réponse) : on dit que la résonance est aigüe (courbe ①).

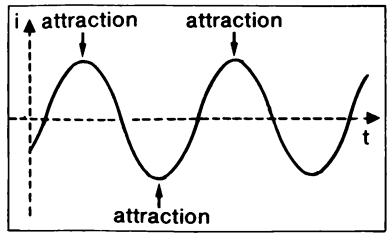


— Si l'amortissement de l'oscillateur est moyen, la résonance est floue (courbe ②).

— Si l'amortissement de l'oscillateur est grand, la réponse est quasi uniforme : il n'y a plus de résonance (courbe ③).

• On peut comme dans le cas de la résonance d'intensité d'un circuit (R, L, C) (revoir ℳ 77) définir une bande passante (limitée aux fréquences donnant une réponse supérieure ou égale à $\frac{\mathcal{R}_0}{\sqrt{2}}$, $\mathcal{R}_0$ étant la réponse à la résonance) et un facteur de qualité (inverse de la bande passante relative).

S 50. *a*) • La lame de fer (L_1, L_2 ou L_3) est fortement attirée à chaque fois que $|i|$ est maximal, c'est-à-dire lorsque i est maximal ou minimal. Soit T_C la période du courant, T_e la période de l'excitation : $T_C = 2T_e$.



Passons aux fréquences $\frac{1}{N_C} = \frac{2}{N_e}$, d'où $N_e = 2N_C = 100$ Hz.

• La lame L_3 qui entre en résonance a donc une fréquence propre N_3 voisine de la fréquence N_e des excitations : $N_3 \simeq N_e = 100$ Hz.

b) α) A la date $t = 0$, la vitesse initiale $v_0 = 0$, l'abscisse initiale $x_0 = 0$, la loi horaire du mouvement uniformément accéléré est donc $x = \frac{1}{2} at^2$. Nous devons donc vérifier que $a = \frac{2x}{t^2}$ est constant pour les divers couples (t, x) donnés :

— pour $t = 92 \cdot 10^{-3}$ s et $x = 22 \cdot 10^{-3}$ m, $a \simeq 5{,}2$ m·s^{-2};
— pour $t = 246 \cdot 10^{-3}$ s et $x = 155 \cdot 10^{-3}$ m, $a \simeq 5{,}1$ m·s^{-2};
— pour $t = 500 \cdot 10^{-3}$ s et $x = 637 \cdot 10^{-3}$ m, $a \simeq 5{,}1$ m·s^{-2};
— pour $t = 616 \cdot 10^{-3}$ s et $x = 967 \cdot 10^{-3}$ m, $a \simeq 5{,}1$ m·s^{-2};
— pour $t = 657 \cdot 10^{-3}$ s et $x = 1\,100 \cdot 10^{-3}$ m, $a \simeq 5{,}1$ m·s^{-2}.

La valeur moyenne de a est donc 5,1 m·s^{-2}.

β) • D'après la loi horaire $x = \frac{1}{2} at^2$, par dérivation on en déduit l'expression de la vitesse de S : $v = at = 5{,}1t$ en unités S.I.

• Lorsque l'arbre fait θ tours le fil se déroule de $x = 2\pi r\theta$ (r en m, x en m). Dérivons par rapport au temps les deux membres de $x = 2\pi r\theta$: d'une part la dérivée de x est la vitesse v de S, d'autre part la dérivée de θ en tr est la vitesse angulaire N_V du volant en tr·s^{-1}, d'où :

$$v = 2\pi r N_V.$$

Comme $v = at$,

$$N_V = \frac{a}{2\pi r} t.$$

γ) Pour $t = 616$ ms, la vitesse de rotation du volant est :

$$N_V = \frac{5{,}1 \times 616 \cdot 10^{-3}}{2\pi \times 10^{-2}} = 50 \text{ tr·s}^{-1}.$$

Alors L_3 entre en résonance, c'est-à-dire subit des excitations de fréquence $N_e \simeq N_3$ c'est-à-dire voisine de 100 Hz.
On en déduit donc qu'à chaque tour de volant, deux impulsions sont données au bâti qui les transmet aux lames.

δ) • La fréquence des excitations données par le volant mal équilibré est donc :

$$N_e = 2N_V = \frac{2at}{2\pi r} = \frac{at}{\pi r} = 162t \text{ (en unités S.I.)}.$$

• A la date $t = 92$ ms, L_1 entre en résonance, sa fréquence N_1 est donc voisine de $162 \times 92 \cdot 10^{-3} = 14{,}9 \simeq 15$ Hz.

• A la date $t = 246$ ms, L_2 entre en résonance, sa fréquence N_2 est donc voisine de $162 \times 246 \cdot 10^{-3} = 39{,}8 \simeq 40$ Hz.

E 51. *Une voiture a pour masse à vide* $M = 1\,100$ kg. *On l'assimilera à un solide de masse* M *porté par quatre ressorts identiques, à spires non jointives, ayant chacun le coefficient de raideur* k.

a) *Quatre passagers de même masse* $m = 70$ kg *montent dans la voiture, celle-ci s'équilibre* $b = 7$ cm *en dessous sa position à vide. Quel est le coefficient de raideur* k? *On donne* $g = 10\ m \cdot s^{-2}$.

b) *Quelle est la période propre des oscillations de translation verticale de la voiture?*

c) *Cette voiture se déplace sur une piste présentant des ondulations régulièrement réparties, équidistantes de* $d = 15$ m. *A quelle vitesse le conducteur doit-il éviter de passer ces bosses?*

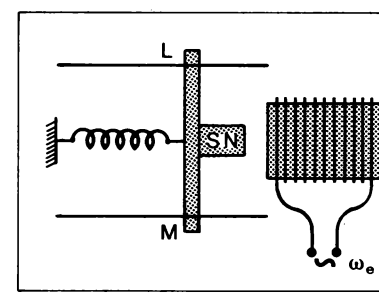
S 51. *a*) Réponse : $k = \dfrac{mg}{b} = 10^4\ N \cdot m^{-1}$.

b) • Les quatre ressorts sont équivalents à un ressort unique de coefficient de raideur $K = 4\ k$.
• La masse totale du système en translation est $M + 4\,m$.
• La voiture ainsi modélisée est équivalente à un pendule élastique constitué par un solide en translation verticale lié à un ressort de raideur K : sa période propre $T_0 = 2\pi \sqrt{\dfrac{M + 4\,m}{4\,k}} = 1{,}17$ s (revoir ℳ 68).

c) • A chaque fois que la voiture passe par une bosse, elle reçoit une secousse verticale. Pour passer d'une bosse à une autre, la voiture met le temps $T_e = \dfrac{d}{v}$, elle est donc excitée tous les temps T_e.
• Lorsque T_e est voisin de T_0, on peut (si l'amortissement de l'oscillateur n'est pas très grand) observer une résonance. Il faut donc éviter que la vitesse v soit voisine de v_c (vitesse critique) telle que $\dfrac{d}{v_c} = T_0$.

D'où $v_c = \dfrac{d}{T_0} = \dfrac{15}{1{,}17} = 12{,}8\ m \cdot s^{-1} \simeq 46\ km \cdot h^{-1}$.

E 52. *Une barre* LM *supporte un petit aimant* NS. *Elle est guidée par deux rails fixes horizontaux, parallèles, qui lui imposent de rester en translation rectiligne. Cette plaque est attachée à un ressort de masse négligeable, de coefficient de raideur* k.



a) *Ecarte la barre de sa position d'équilibre, on la laisse aller. Quelle est la pulsation propre* ω_0 *de cet oscillateur mécanique? (La figure correspond à la question* b)).

On donne : masse de la barre et de l'aimant : $m = 50$ g;
coefficient de raideur du ressort : $k = 100\ N \cdot m^{-1}$.

On suppose pour évaluer ω_0 que les frottements sont négligeables.

b) *En réalité l'oscillateur est amorti. Pour lui imposer un mouvement permanent, on approche de l'aimant une bobine parcourue par un courant alternatif et comportant un noyau de fer. Sous l'action de cet électroaimant, la barre vibre avec une pulsation ω_e imposée par ce dernier (ω_e est égale à la pulsation du courant traversant l'électroaimant).*

Pour caractériser la réponse de la barre aux excitations de pulsation ω_e, on détermine la vitesse maximale v_m d'agitation de la barre. On obtient les résultats suivants (ω_e en $rad \cdot s^{-1}$, v_m en $cm \cdot s^{-1}$) :

ω_e	5	10	15	20	25	30	35	40
v_m	4	8	13	19	26	35	47	57
ω_e	45	50	55	60	70	80	90	100
v_m	61	57	50	43	33	26	22	19

α) *Tracer la courbe de réponse représentant les variations de v_m en fonction de ω_e.*

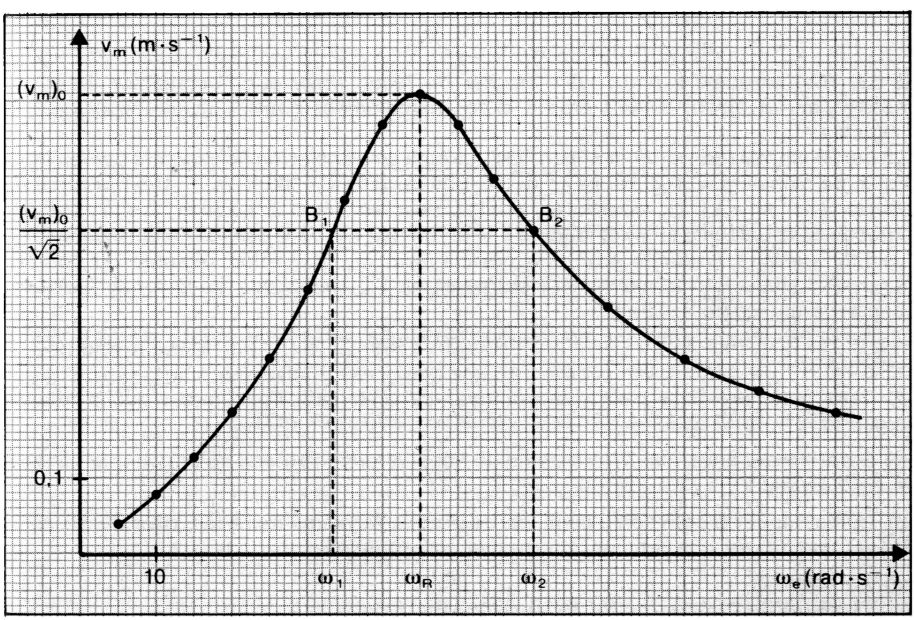
β) *En déduire la pulsation ω_R de résonance. La comparer à ω_0.*

γ) *Mesurer, après l'avoir définie, la bande passante en pulsation.*

δ) *Évaluer, après l'avoir défini, le facteur de qualité de cet oscillateur mécanique.*

S 52. *a*) Le pendule élastique constitué par le solide barre-aimant en translation horizontale lié à un ressort, a pour pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 44{,}7 \text{ rad} \cdot s^{-1}$ (revoir ℳ 68).

b) α) La courbe de réponse est tracée ci-dessous.



β) • Il y a résonance de vitesse de l'oscillateur mécanique lorsque la vitesse maximale v_m passe par sa valeur la plus grande $(v_m)_0$.
Graphiquement on relève que la pulsation de résonance de vitesse est $\omega_R = 45\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

• Nous avons trouvé que la pulsation propre de l'oscillateur est $\omega_0 = 44{,}7\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Il y a donc résonance lorsque ω_e est voisin de ω_0.

(*Remarque.* Dans le cas de cette résonance où la grandeur considérée est la vitesse de l'oscillateur, on démontre qu'il y a théoriquement résonance lorsque $\omega_e = \omega_0$, voir E 53.)

γ) A la résonance, la vitesse $(v_m)_0 = 0{,}61\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.
La bande passante correspond aux pulsations ω_e qui donnent une réponse $v_m \geqslant \dfrac{(v_m)_0}{\sqrt{2}}$.
Graphiquement, à partir des points d'intersection B_1 et B_2 de la courbe de réponse avec la droite $v_m = \dfrac{0{,}61}{\sqrt{2}} = 0{,}43\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, on détermine les limites $\omega_1 \simeq 34\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\omega_2 \simeq 60\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ de la bande passante.
La largeur de la bande, en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, est $\omega_2 - \omega_1 \simeq 60 - 34 \simeq 26\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

δ) • La bande passante relative est $\dfrac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_R} = \dfrac{26}{45}$.

• Par définition le facteur de qualité du circuit Q est l'inverse de la bande passante relative : $Q = \dfrac{\omega_R}{\omega_2 - \omega_1} = \dfrac{45}{26} \simeq 1{,}7$.
Ce coefficient n'est pas très supérieur à 1, la résonance est peu aigue.

E 53. *(Cet exercice a pour but d'étudier de façon théorique l'oscillateur élastique excité par un électroaimant étudié expérimentalement dans* E 52, *se reporter à la figure.)*
La partie mobile (barre LM *et aimant* SN), *guidée en translation horizontale par les deux rails, de masse* $m = 50$ g, *reliée au ressort de raideur* $k = 100\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$, *subit la force de frottement* $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$ (λ, *coefficient positif, constant, égal à* $1{,}3\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}$; $\vec{v}$, *vecteur vitesse de la partie mobile) et la force* $\vec{F} = F_m \cos(\omega_e t)\vec{j}$ *de la part de l'électroaimant* ($\vec{j}$, *vecteur unitaire parallèle aux rails horizontaux;* ω_e, *pulsation réglable du courant alternatif sinusoïdal alimentant l'électroaimant;* F_m, *amplitude de la force, indépendante de* ω_e, *égale à* 0,8 N).
L'oscillateur prend ainsi un mouvement rectiligne sinusoïdal autour de sa position d'équilibre.

a) *Dans cette première partie, la grandeur caractérisant l'oscillateur est la vitesse algébrique* v *telle que* $\vec{v} = v\vec{j}$.

α) *Déterminer l'équation différentielle de l'oscillateur entretenu en utilisant la variable* v *uniquement.*

β) *Comparer cette équation à celle, écrite avec la variable intensité* i, *d'un dipôle série* R-L-C, *excité par une tension alternative sinusoïdale* $u = U_m \cos \omega_e t$.

γ) *En déduire :*
— *l'équation de la courbe de réponse tracée dans* S 52;

— *l'expression permettant de calculer* ω_e *à la résonance de vitesse;*
— *l'expression de la largeur de bande passante.*
Vérifier que les résultats concordent avec ceux obtenus dans S 52.

b) *Dans cette deuxième partie, la grandeur caractérisant l'oscillateur est l'élongation* x *telle que* $\overrightarrow{G_0G} = x\vec{j}$ (G_0 *position à l'équilibre du centre d'inertie de la partie mobile*).

α) *Déterminer l'équation différentielle de l'oscillateur entretenu, en utilisant la variable* x *uniquement.*

β) *Déterminer l'amplitude* X_m *de* x *en fonction de* F_m, m, ω_e, k *et* λ.

γ) *Pour quelle valeur de* ω_e *observe-t-on la résonance d'amplitude?*

S 53. *a*) α) • Le système est la partie mobile en translation.
• Il est soumis à :
— son poids $\vec{P}$ perpendiculaire au vecteur unitaire horizontal $\vec{j}$;
— la réaction $\vec{R}$ des rails perpendiculaires à $\vec{j}$;
— la tension du ressort $\vec{G} = -k\overrightarrow{G_0G} = -kx\vec{j}$ (en remarquant qu'en G_0 le ressort est à vide);
— la force de frottement $\vec{f} = -\lambda v\vec{j}$;
— la force due à l'électroaimant $\vec{F} = F_m \cos(\omega_e t)\vec{j}$.
• D'après le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{P} + \vec{R} - kx\vec{j} - \lambda v\vec{j} + F_m \cos(\omega_e t)\vec{j} = m\bar{a}\vec{j}.$$

Multiplions scalairement par $\vec{j}$

$$-kx - \lambda v + F_m \cos \omega_e t = m\bar{a}.$$

D'une part $\bar{a} = \dfrac{dv}{dt}$; d'autre part comme $v = \dfrac{dx}{dt}$ et en remarquant que x est une fonction alternative sinusoïdale, x est la primitive alternative de v : $x = \int v\,dt$.

L'équation différentielle s'écrit donc :

$$F_m \cos \omega_e t = \lambda v + m\frac{dv}{dt} + k\int v\,dt. \qquad (1)$$

β) Lorsque la tension $U_m \cos \omega_e t$ excite un dipôle série R-L-C

$$U_m \cos \omega_e t = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt. \qquad (2)$$

La comparaison entre (1) et (2) est évidente : $U_m \longleftrightarrow F_m$; $i \longleftrightarrow v$ c'est-à-dire qu'à l'intensité maximale I_m correspond la vitesse maximale v_m; $R \longleftrightarrow \lambda$; $L \longleftrightarrow m$; $\dfrac{1}{C} \longleftrightarrow k$. (On retrouve certaines analogies vues dans S 27.)

γ) • A $\dfrac{U_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega_e - \dfrac{1}{C\omega_e}\right)^2}$ correspond $\dfrac{F_m}{v_m} = \sqrt{\lambda^2 + \left(m\omega_e - \dfrac{k}{\omega_e}\right)^2}$.

Par suite $v_m = \dfrac{F_m}{\sqrt{\lambda^2 + \left(m\omega_e - \dfrac{k}{\omega_e}\right)^2}} = \dfrac{0{,}8}{\sqrt{1{,}3^2 + \left(5\cdot 10^{-2}\omega_e - \dfrac{100}{\omega_e}\right)^2}}$: c'est

l'équation de la courbe de réponse tracée dans S 52 (vous pourrez éventuellement calculer quelques valeurs de v_m et les confronter avec celles données par le tableau de E 52).

• A la résonance de vitesse, v_m doit être maximal : le nombre $\left(m\omega_e - \frac{k}{\omega_e}\right)^2$ doit être minimal. Ce nombre positif est minimal lorsqu'il est nul. Alors $\omega_e = \sqrt{\frac{k}{m}}$: la pulsation à la résonance de vitesse est égale à la pulsation propre de l'oscillateur non amorti partie mobile-ressort.

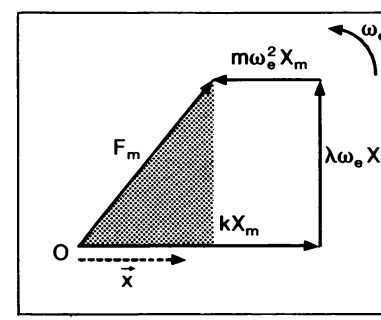
• Pour un circuit électrique la largeur de bande, en $rad \cdot s^{-1}$, est $\omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$ (revoir ℳ 77). Par analogie, la largeur de bande est ici $\omega_2 - \omega_1 = \frac{\lambda}{m} = \frac{1{,}3}{50 \cdot 10^{-3}} = 26\ rad \cdot s^{-1}$, c'est la valeur déterminée dans S 52.

b) α) Modifions l'équation $-kx - \lambda v + F_m \cos \omega_e t = m\bar{a}$ en utilisant uniquement la variable x :

$$v = \frac{dx}{dt}, \qquad \bar{a} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

d'où :
$$F_m \cos \omega_e t = kx + \lambda \frac{dx}{dt} + m \frac{d^2x}{dt^2}.$$

β) Associons à la fonction alternative sinusoïdale x un vecteur de Fresnel $\vec{x}$ de norme X_m, tournant à ω_e $rad \cdot s^{-1}$ autour de O.



Le vecteur associé à kx est $k\vec{x}$.

Le vecteur associé à $\lambda \frac{dx}{dt}$ est obtenu en tournant $\vec{x}$ de $+\frac{\pi}{2}$, en multipliant sa norme par ω_e et par λ.

Le vecteur associé à $m \frac{d^2x}{dt^2}$ est obtenu en tournant $\vec{x}$ de 2 fois $\frac{\pi}{2}$ donc de π, en multipliant sa norme par ω_e^2 et par m.

Le vecteur somme représente la fonction $F_m \cos \omega_e t$.

Dans le triangle rectangle gris :

$$F_m^2 = (kX_m - m\omega_e^2 X_m)^2 + (\lambda\omega_e X_m)^2,$$

d'où
$$X_m = \frac{F_m}{\sqrt{(k - m\omega_e^2)^2 + \lambda^2 \omega_e^2}}.$$

γ) • Posons $\Delta = k^2 + m^2\omega_e^4 - 2km\omega_e^2 + \lambda^2\omega_e^2$. L'amplitude $X_m = \dfrac{F_m}{\sqrt{\Delta}}$ est maximale lorsque Δ est minimal.

La dérivée de Δ par rapport à ω_e est $\Delta' = 4m^2\omega_e^3 - 4km\omega_e + 2\lambda^2\omega_e$ soit $\Delta' = \omega_e(4m^2\omega_e^2 - 4km + 2\lambda^2)$. Elle s'annule pour la seule valeur positive $\omega_{e,0} = \sqrt{\dfrac{k}{m} - \dfrac{\lambda^2}{2m^2}}$. On vérifiera que Δ' est négatif pour ω_e compris entre zéro et $\omega_{e,0}$, positif pour ω_e supérieur à $\omega_{e,0}$: Δ passe donc par un minimum pour $\omega_{e,0}$.

Il y a donc résonance d'amplitude pour $\omega_{e,0}$, inférieur à la pulsation propre de l'oscillateur non amorti $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

Numériquement $\omega_{e,0} = 40{,}8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

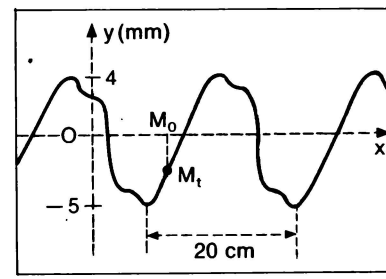
• *Remarque :* $\omega_{e,0}$ n'existe, différent de zéro, que si $\dfrac{k}{m} - \dfrac{\lambda^2}{2m^2} > 0$, c'est-à-dire si le coefficient de la force de frottement $\lambda < \sqrt{2km}$; dans le cas contraire on n'observe pas de résonance d'amplitude.

5 ONDES SINUSOIDALES PROGRESSIVES OU STATIONNAIR

E 54. *L'une des extrémités d'une corde horizontale est reliée à un vibreur de fréquence* N = 100 Hz *qui lui impose un mouvement de va-et-vient vertical. L'autre extrémité de la corde est enrobée d'un matériau inélastique.*

a) *Comment qualifie-t-on l'onde qui s'établit sur la corde?*

b) *A la date* t, *on prend une photographie de la corde, celle-ci a l'allure reproduite ci-contre. L'axe* Ox *correspond à la position qu'avait la corde au repos.*
Quelle est la longueur d'onde λ? *Quelle est la célérité de l'onde?*



c) *Soit le point de corde* M *de position* M_t *à l'instant* t.

α) *Comment appelle-t-on l'écart algébrique* $\overline{M_0M_t}$? *Quelle grandeur caractéristique* u(x; t) *peut-on choisir pour caractériser l'onde?*

β) *Quelle est la trajectoire de* M *par rapport à la terre? Le mouvement de* M *est-il périodique? harmonique?*

d) *Que peut-on dire des états vibratoires des points de cette corde dont les grandeurs caractéristiques sont :*

① u(0,5 m; 0,11 s)
② u(0,9 m; 0,11 s)
③ u(0,5 m; 0,16 s)
④ u(0,3 m; 0,19 s).

80 La double périodicité d'une onde progressive.

• Une source vibratoire, placée dans un milieu de propagation adapté, de grandes dimensions de façon à ne pas tenir compte des réflexions aux frontières du milieu, reproduit un même signal tous les temps T. Ces signaux se propagent à partir de la source S : ils constituent *une onde progressive.*

• Chaque point du milieu de propagation, atteint par l'onde, reproduit le même mouvement que celui né à la source : ce point vibre à la période temporelle T.

• Suivant un rayon d'onde Sx, le signal s'étale sur une longueur λ, appelée longueur d'onde (ou période spatiale).
• La longueur d'onde est la distance parcourue par l'onde, à la célérité uniforme v, suivant un rayon, pendant une période T :

$$\lambda = vT.$$

• Note : la célérité est aussi notée c, dans ce cours nous réserverons la lettre c uniquement pour la vitesse de propagation d'une onde électromagnétique dans le vide.

S 54. *a*) Les signaux, nés à l'extrémité de la corde liée au vibreur, se propagent jusqu'au matériau inélastique où ils sont absorbés : la corde est donc parcourue par une onde progressive. Cette onde est transversale car chaque point de corde subit un petit mouvement vertical, perpendiculaire à la direction de propagation horizontale.

b) • Le long de la corde Ox, la période spatiale ou longueur d'onde est $\lambda = 0{,}20$ m.
• La célérité de l'onde progressive transversale le long de cette corde est :

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda N = 0{,}20 \times 100 = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

c) α) Le point M oscille autour de sa position de repos M_0, l'écart algébrique $\overline{M_0 M_t}$ est l'élongation transversale de M.
On peut prendre pour caractériser l'onde la grandeur $u(x; t) = \overline{M_0 M_t}$, x désignant l'abscisse $\overline{OM_0}$ de M, t la date correspondant à la position M_t de M.

β) • Le point M, en gardant la même abscisse $x_M = \overline{OM_0}$, oscille entre les points d'élongation extrême $y = +4$ mm et $y = -5$ mm : le point M décrit un segment transversal, de longueur 9 mm.
• Tous les intervalles de temps T, le point M reprend le même état vibratoire : son mouvement est périodique.
• Le mouvement de M n'est pas harmonique car l'allure de la corde, à un instant donné, n'est pas celle d'une sinusoïde.

d) • Présentation de la démarche :
— un point de corde donné (caractérisé par une valeur de x donnée) reprend le même état de mouvement aux instants t_1 et t_2 tels que $t_2 - t_1 = nT$ ($n \in \mathbb{Z}$);
— au même instant, deux points de corde ont même état vibratoire, c'est-à-dire sont en concordance de phase, si la différence de leurs abscisses est $x_2 - x_1 = n'\lambda$ ($n' \in \mathbb{Z}$).
• Les grandeurs caractéristiques ① et ② correspondent à deux points P (abscisse $x_p = 0{,}5$ m) et Q (abscisse $x_Q = 0{,}9$ m) considérés au même instant $t_1 = 0{,}11$ s : comme $\frac{x_Q - x_P}{\lambda} = 2$, nombre appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$, il s'ensuit que les états vibratoires ① et ② sont identiques.
• Les grandeurs caractéristiques ① et ③ correspondent au même point P considéré aux instants $t_1 = 0{,}11$ s et $t_2 = 0{,}16$ s : comme $\frac{t_2 - t_1}{T} = 5$, nombre appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$, il s'ensuit que les états vibratoires ① et ③ sont identiques.

• Pour la grandeur 4 la comparaison est un peu moins évidente :
— d'une part $u(0{,}3\text{ m};\ 0{,}19\text{ s}) = u(0{,}3\text{ m};\ 0{,}11\text{ s})$: cela correspond à deux états du point R d'abscisse $x_R = 0{,}3$ m, séparés par un intervalle de temps égal à 8 T;
— d'autre part $u(0{,}3\text{ m};\ 0{,}11\text{ s}) = u(0{,}5\text{ m};\ 0{,}11\text{ s})$: cela revient à considérer au même instant $t_1 = 0{,}11$ s, les deux points R et P, séparés par une distance égale à λ;
— par suite $u(0{,}3\text{ m};\ 0{,}19\text{ s}) = u(0{,}5\text{ m};\ 0{,}11\text{ s})$: les états vibratoires ④ et ① sont identiques.
• En résumé les quatre grandeurs vibratoires ①, ②, ③ et ④ sont égales : elles correspondent à des états vibratoires identiques, c'est-à-dire en concordance de phase.

E 55. *Une longue corde au repos est rectiligne. Son extrémité* S *occupe sa position au repos* S_0. *On repère les points de cette corde sur l'axe* S_0x, *d'origine* S_0, *porté par la corde au repos, de vecteur unitaire* $\vec{i}$.
A la date $t = 0$, *sous l'action du diapason entretenu, le point* S *part transversalement de sa position* S_0 *dans le sens opposé au vecteur unitaire transversal* $\vec{j}$, *perpendiculaire à* $\vec{i}$. S *prend ainsi un mouvement harmonique sinusoïdal d'amplitude* $A = 5$ mm *et de fréquence* $N = 50$ Hz.

a) • *Quelle est la loi horaire du mouvement de* S *que l'on notera* $u(0; t)$ (*l'indice* 0 *précise que c'est la grandeur caractéristique du point d'abscisse* $x = 0$).

b) *Les vibrations se propagent le long de la corde à la célérité* $v = 10\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

α) *Soit* M *un point de corde d'abscisse* x, *atteint par l'onde progressive, donner l'expression de la grandeur caractéristique* $u(x; t)$.

β) *Dessiner l'allure de la corde à la date* $t = 1$ s. *Préciser la position des points en concordance de phase avec* S, *la position des points en opposition de phase avec* S.

S 55. *a)* • La grandeur caractéristique $u(0; t)$ s'assimile à l'élongation transversale $\overline{S_0S_t}$ mesurée algébriquement à l'aide du vecteur unitaire transversal $\vec{j}$. Comme le mouvement de S est harmonique :

$$u(0; t) = \overline{S_0S_t} = A\cos(\omega t + \varphi).$$

• Nous connaissons l'amplitude $A = 5\cdot10^{-3}$ m et la pulsation $\omega = 2\pi N = 100\pi\text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$.
• Évaluons φ. Le point S prend une vitesse $\overline{v_S} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$, traduisons le fait qu'à la date $t = 0$:
— d'une part, $\overline{S_0S_t} = 0$ soit $A\cos\varphi = 0$ (1);
— d'autre part, puisque S part dans le sens opposé à $\vec{j}$, $\overline{v_{S,0}} < 0$, soit $-A\omega\sin\varphi < 0$ (2).

La valeur $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ satisfait les conditions (1) et (2).

• En résumé $u(0, t) = 5\cdot10^{-3}\cos\left(100\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ en unités S.I.

b) *α)* • A l'instant t, le point M a l'élongation qu'avait S à la date $\left(t - \dfrac{x}{v}\right)$ puisque l'onde met la durée $\dfrac{x}{v}$ pour passer de S_0 à M_0.

• Par suite $u(x; t) = u\left(0; t - \frac{x}{v}\right)$

$$u(x; t) = 5 \cdot 10^{-3} \cos\left[100\,\pi\left(t - \frac{x}{v}\right) + \frac{\pi}{2}\right].$$

Comme $v = 10\ m \cdot s^{-1}$, $u(x; t) = 5 \cdot 10^{-3} \cos\left(100\,\pi t - 10\,\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$ en unités S.I.

β) • L'équation cartésienne de la corde dans le repère d'espace $(S_0, \vec{i}, \vec{j})$ est, à la date $t = 1$ s,

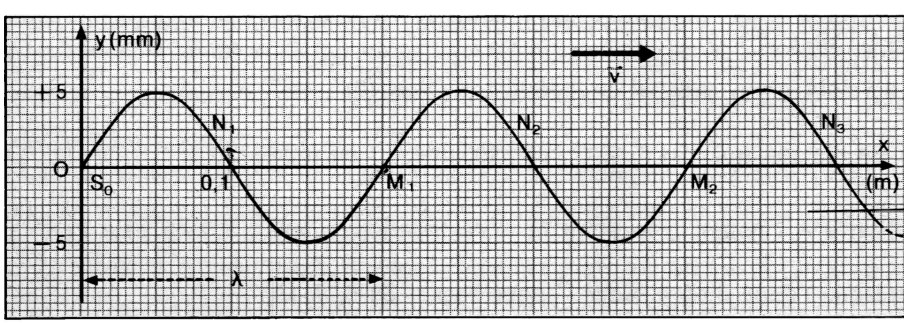
$$\begin{aligned} u(x; 1\ s) &= 5 \cdot 10^{-3} \cos\left(100\,\pi - 10\,\pi x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 5 \cdot 10^{-3} \cos\left(\frac{\pi}{2} - 10\,\pi x\right) \\ &= 5 \cdot 10^{-3} \sin 10\,\pi x. \end{aligned}$$

• La corde a l'allure d'une sinusoïde de période spatiale λ, telle que $\sin 10\,\pi(x + \lambda) = \sin 10\,\pi x$, soit $10\,\pi\lambda = 2\,\pi$ et $\lambda = 0{,}2$ m. (On aurait pu déterminer λ en utilisant la relation $\lambda = \frac{v}{N} = \frac{10}{50} = 0{,}2$ m.) La courbe est représentée ci-dessous, les échelles sont différentes pour l'axe des abscisses et l'axe des élongations.

• Les points situés à la distance $x = n\lambda$, $n \in \mathbb{N}^*$, sont en concordance de phase avec S (sur la figure, les points M_1 et M_2).

• Les points situés à la distance $x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$, $n \in \mathbb{N}$, sont en opposition de phase avec S (sur la figure, les points N_1, N_2 et N_3).

• Remarque : — si l'on suppose la corde de très grande longueur, à la date $t = 1$ s, le front de l'onde a parcouru la distance $d = vt = 10$ m, la corde a l'allure d'une sinusoïde pour x compris entre 0 et 10 m et est au repos pour x supérieur à 10 m;
— si la corde a une longueur inférieure à 10 m, tous ses points sont en vibration à la date $t = 1$ s (nous admettons qu'un dispositif d'amortissement en bout de corde évite toute réflexion).



81 **La fonction d'onde progressive sinusoïdale.**

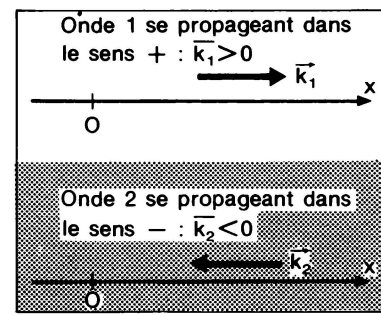
• Généralisons le résultat dégagé dans l'exercice précédent, il est intéressant pour cela d'introduire, pour caractériser l'onde progressive sinusoïdale, un vecteur appelé **vecteur d'onde $\vec{k}$:**
— de direction parallèle au rayon d'onde suivant lequel on étudie la propagation;
— ayant le sens de la propagation;
— de module $\mathbf{k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}}$ exprimé en $rad \cdot m^{-1}$;
— de mesure algébrique $\bar{k}$ suivant le rayon d'onde orienté ($\bar{k} = +k$ si la propagation se fait dans le sens $+$, $\bar{k} = -k$ si la propagation se fait dans le sens $-$).

• Soit O le point d'abscisse $x = 0$ sur le rayon d'onde orienté Ox, la grandeur caractéristique de l'onde en O est de la forme :

$$u(0; t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

• Alors en tout point du rayon d'onde d'abscisse x, à la date t, la grandeur caractéristique de l'onde est :

$$\mathbf{u(x; t) = A \cos(\omega t - \bar{k}x + \varphi).}$$



• L'amplitude A de l'onde progressive est la même en tous les points.

• La phase de l'onde $\Phi(x; t) = \omega t - \bar{k}x + \varphi$ est fonction à la fois de l'abscisse x et du temps t.

• *Choix de la grandeur caractéristique :*
— pour des vibrations élastiques transversales se propageant le long d'une corde, à la surface d'un liquide, on choisit l'élongation transversale;
— pour des vibrations élastiques longitudinales se propageant dans les gaz, liquides, solides (en particulier les vibrations sonores) on utilise en général la pression différentielle $(p_t - p_0)$ (p_t pression à la date t, au point d'abscisse x; p_0 pression au repos), mais on peut utiliser l'élongation longitudinale;
— pour les ondes électromagnétiques on choisit souvent le champ électrique $\vec{E}$, transversal; mais on peut aussi utiliser le champ magnétique $\vec{B}$, transversal, perpendiculaire à $\vec{E}$.

E 56. *Une pointe frappe la surface d'une nappe de liquide en* O, *elle impose au liquide en ce point un mouvement vertical d'élongation* $u(0; t) = 10^{-3} \cos 40\pi t$ *en unités* S.I.

a) *La distance radiale entre quatre rides consécutives est* 2,4 cm. *Quelle est la célérité de l'onde progressive?*

b) *On étudie la propagation suivant un rayon d'onde* Ox, *orienté de* O *vers* x, *dans le sens de la propagation.*

α) *Donner l'expression en fonction du temps de l'élongation transversale* u(x; t) *d'un point de* Ox, *d'abscisse* x. *On néglige l'affaiblissement de l'onde.*

β) *Quel est le déphasage, au même instant, entre* M *d'abscisse* $x_M = 9{,}4$ cm *et* O?

γ) *Représenter la vibration en* M *en fonction du temps.*

δ) *Déterminer le nombre des points du segment* OM *qui vibrent en opposition de phase avec* M.

S 56. *a*) • Les vibrations se propagent dans toutes les directions horizontales passant par O, à la même célérité : on obtient des rides circulaires qui se propagent. Deux rides consécutives sont radialement écartées d'une longueur d'onde λ.
Entre quatre rides consécutives, la distance mesurée suivant un rayon d'onde est $3\lambda = 2{,}4$ cm, d'où $\lambda = 0{,}8\text{ cm} = 8 \cdot 10^{-3}$ m.
• La pulsation de l'onde progressive $\omega = 40\pi$, la fréquence est donc $N = \dfrac{\omega}{2\pi} = 20$ Hz.

Comme $\lambda = \dfrac{v}{N}$, on en déduit $v = \lambda N = 8 \cdot 10^{-3} \times 20 = 0{,}16\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

b) *α*) • Le vecteur d'onde $\vec{k}$ suivant le rayon Ox, a le sens de la propagation, sa mesure algébrique suivant Ox est $\bar{k} = +k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{8 \cdot 10^{-3}} = 250\pi\ \text{rad} \cdot \text{m}^{-1}$.
Comme en O, $u(0; t) = 10^{-3} \cos 4\pi t$, en tout point de Ox :

$$u(x; t) = 10^{-3} \cos(40\pi t - \bar{k}x) = 10^{-3} \cos(40\pi t - 250\pi x).$$

β) Le déphasage, au même instant, entre M et O est :

$$\Phi_M - \Phi_O = (40\pi t - 250\pi x_M) - (40\pi t - 250\pi x_O) = -250\pi(x_M - x_O).$$

Numériquement :

$$\Phi_M - \Phi_O = -250\pi(9{,}4 \cdot 10^{-2}) = -23{,}5\pi = -24\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\ \text{rad (modulo } 2\pi).$$

En conséquence le point M est en quadrature avance sur le point O.

γ) • L'élongation du point M a pour expression :

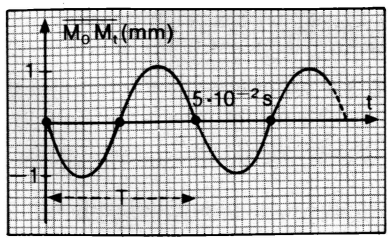
$$\overline{M_O M_t} = u(9{,}4 \cdot 10^{-2}\text{ m}; t) = 10^{-3} \cos(40\pi t - 250\pi \times 9{,}4 \cdot 10^{-2}) = 10^{-3} \cos(40\pi t - 23{,}5\pi).$$

Ajoutons 12 fois 2π à la phase, cela ne change pas la valeur du cosinus :

$$\overline{M_O M_t} = 10^{-3} \cos\left(40\pi t + \frac{\pi}{2}\right).$$

(On retrouve bien que M est en quadrature avance sur O.)

• Les variations de $\overline{M_O M_t}$ en fonction du temps sont représentées sur la courbe ci-contre.



Cette courbe est une sinusoïde de période

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{40\pi} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ s.}$$

δ) • Les points qui vibrent en opposition de phase avec M, appartenant au segment OM, ont des abscisses x telles que :

$$x_M - x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant x \leqslant x_M \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Par suite $x = x_M - \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$ soit, l'unité de longueur étant le mm :

$$x = 94 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \times 8 = 90 - 8n.$$

Encadrons n :

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant 90 - 8n \leqslant 94 \\ -90 &\leqslant -8n \leqslant 4 \\ 90 &\geqslant 8n \geqslant -4 \\ 11{,}25 &\geqslant n \geqslant -0{,}5. \end{aligned}$$

Comme $n \in \mathbb{N}$, il s'ensuit $n \in \{0; 1; ...; 11\}$: il y a donc 12 valeurs de n qui conviennent, donc 12 points entre O et M vibrant en opposition de phase avec M.

E 57. *Le milieu de propagation est un long ressort rectiligne. La première spire est* O. *Au repos toutes les spires sont équidistantes de* 1 cm. *L'axe du ressort* Ox *est orienté positivement de* O *vers* x. *Une onde élastique longitudinale se propage le long du ressort. La grandeur prise pour caractériser l'onde est l'élongation longitudinale des spires* $\overline{M_O M_t}$ *mesurée algébriquement avec le vecteur unitaire* $\vec{j}$ (M_O *position au repos de la spire* M, M_t *position en mouvement vibratoire à la date* t), *le vecteur* $\vec{j}$ *a la direction et le sens de l'axe* Ox. *Cette grandeur* $\overline{M_O M_t}$ *a pour expression :*

$$u(x; t) = 6 \cdot 10^{-3} \cos\left(100\pi t - \frac{50\pi}{3} x\right)$$

avec les unités m, s *et* rad.

a) α) *Quelle est l'amplitude de l'onde?*

β) *Dans quel sens se propage-t-elle?*

γ) *Quelle est sa période temporelle?*

δ) *Quelle est sa longueur d'onde?*

ε) *Quelle est sa célérité?*

b) α) *Tracer la courbe représentant* u(x; 0,21 s). *Échelles : en abscisse* 1 mm *pour* 1 mm, *en ordonnée* 1 mm *pour* 1 mm.

β) *En déduire l'allure du ressort à la date* t = 0,21 s. *Que peut-on dire relativement à la tension du ressort?*

S 57. *a*) α) L'amplitude de l'onde progressive est la même tout le long du ressort, elle est égale à $A = 6 \cdot 10^{-3}$ m = 6 mm.

β) La grandeur caractéristique de l'onde est de la forme :
$u(x; t) = A \cos(\omega t - \bar{k} x)$.

La mesure algébrique du vecteur d'onde sur l'axe Ox est $\bar{k} = \frac{50\pi}{3}$ rad·m^{-1} : comme $\bar{k}$ est positif cela signifie que l'onde chemine dans le sens positif de Ox.

γ) La pulsation $\omega = 100\pi$ rad·s^{-1}, par suite $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{100\pi} = 2 \cdot 10^{-2}$ s.

δ) Le module k du vecteur d'onde est tel que $k = \frac{2\pi}{\lambda}$,

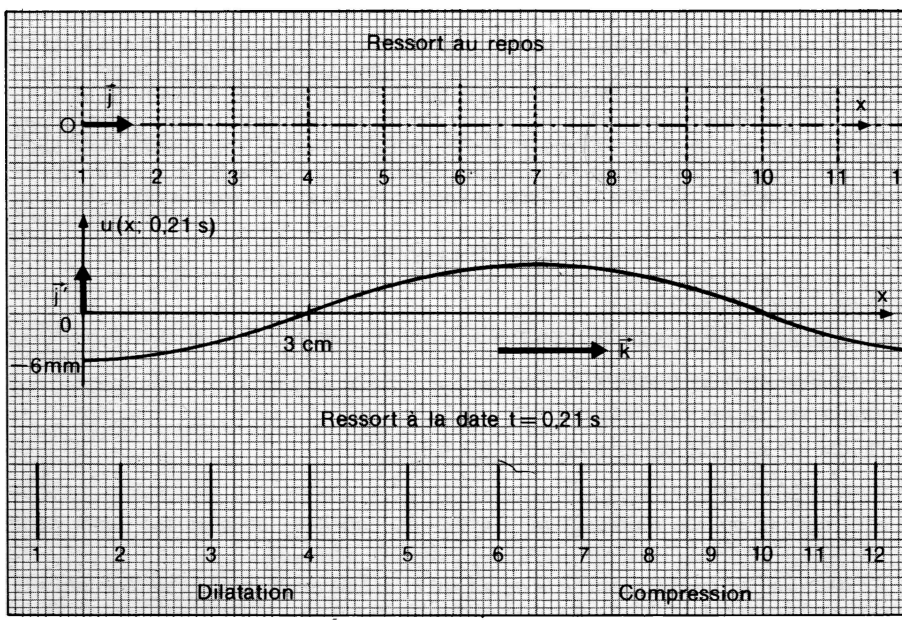
d'où $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\frac{50\pi}{3}} = 0{,}12$ m.

ε) La célérité v de l'onde est telle que $\lambda = vT$, d'où $v = \frac{\lambda}{T} = 6$ m·s^{-1}.

b) α) • $u(x; 0{,}21\text{ s}) = 6 \cdot 10^{-3} \cos\left(21\pi - \frac{50\pi}{3} x\right) = 6 \cdot 10^{-3} \cos\left(\pi - \frac{50\pi}{3} x\right)$.

Comme $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$, il s'ensuit $u(x; 0{,}21\text{ s}) = -6 \cdot 10^{-3} \cos \frac{50\pi}{3} x$.

• La courbe représentant $u(x; 0{,}21\text{ s})$ en fonction de x est représentée ci-dessous : c'est une sinusoïde de période $\lambda = 12$ cm. Il faut remarquer que $u(x; 0{,}21\text{ s})$ est mesuré sur cette courbe algébriquement à l'aide du vecteur unitaire $\vec{j}'$ perpendiculaire à Ox.



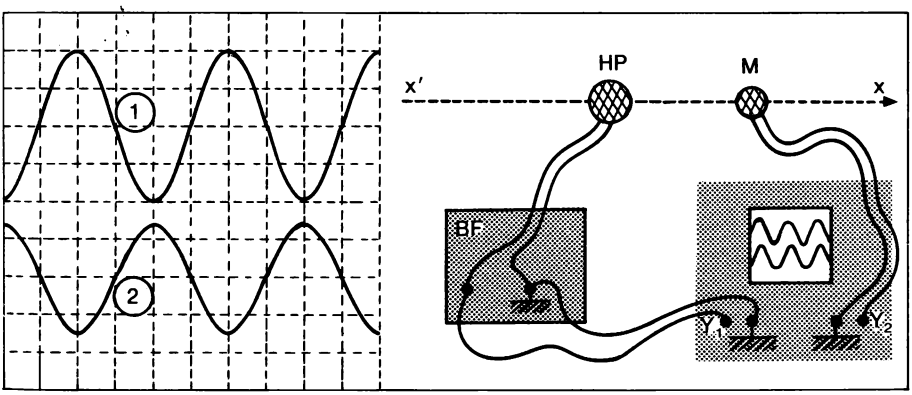
β) • A la date t = 0,21 s, la spire O (numérotée 1) a l'élongation — 6 mm : elle est donc écartée de 6 mm de sa position de repos, à contresens de $\vec{j}$.
La spire 2 est écartée d'environ 5 mm à un contresens de $\vec{j}$, la spire 3 de 3 mm à contresens de $\vec{j}$, la spire 4 passe par sa position de repos, la spire 5 est écartée de 3 mm dans le sens de $\vec{j}$, etc. on obtient ainsi l'allure du ressort représentée en bas de la figure.

• Autour de la spire 4, l'écartement est supérieur à l'écartement entre deux spires au repos : cette zone est une zone de dilatation du ressort (à la date t considérée).
Autour de la spire 10, l'écartement est inférieur à l'écartement au repos : cette zone est une zone de compression.

• Entre le cœur de la zone de dilatation (spire 4) et le cœur de la zone de compression (spire 10) la distance est $\frac{\lambda}{2}$. En effectuant un dessin plus grand, on constaterait que les cœurs de deux zones de compression successives sont à λ l'un de l'autre.

• En résumé, il y a deux façons de décrire la propagation de l'onde progressive longitudinale le long du ressort :
— prendre comme grandeur caractéristique l'élongation longitudinale;
— prendre comme grandeur caractéristique la variation de tension du ressort.
On constate que lorsque l'élongation s'annule, la valeur absolue de la variation de tension est maximale.

E 58. *Un haut-parleur* (HP) *a la forme d'une boule pratiquement ponctuelle. Il est excité par un générateur électrique* (BF, *initiales de basse fréquence*), *de ce fait il émet un son harmonique de fréquence* N *égale à celle de la tension délivrée par le générateur. Cette tension est appliquée à l'entrée* Y_1 *d'un oscillographe : la courbe* ① *obtenue restera stabilisée sur l'écran pendant toute l'expérience.*
Un microphone se déplace sur l'axe (x', HP, x) *orienté positivement de* x' *vers* x, *d'origine* HP. *Ce microphone transforme les variations de la pression de l'air à son niveau en variations de tension électrique de même fréquence. cette tension est appliquée à l'entrée* Y_2 *de l'oscillographe. La constante de balayage est* 0,25 ms *par division.*



a) *Quelle est la fréquence* N?

b) *Le microphone a pour abscisse* $x_1 = 0{,}85$ m, *la courbe* ② *visualisée sur la voie* Y_2 *est celle représentée sur la figure.*

α) *Quel est le déphasage entre les courbes* ① *et* ② *représentées?*

β) *On déplace le microphone dans le sens* +, *à partir du point d'abscisse* x_1 : *la courbe* ② *se translate vers la droite, elle devient en phase avec* ①, *puis en opposition de phase, puis à nouveau en phase pour la position du microphone d'abscisse* $x_2 = 1{,}36$ m.
En déduire la célérité du son dans les conditions de l'expérience.

c) *Au niveau de* HP, *d'abscisse* $x = 0$, *la pression différentielle de l'air a pour expression* $(p_t - p_0) = u(0; t) = 10^{-2} \cos 2\pi Nt$, *l'amplitude étant exprimée en pascal* (Pa), *le temps en* s.

α) *Le microphone a une abscisse* $x > 0$.
Quelle est l'expression de la pression différentielle $u(x; t)$ *au niveau du microphone? En déduire comment varie la pression différentielle en fonction du temps au point d'abscisse* $x_1 = 0{,}85$ m.

β) *Le microphone a une abscisse* $x < 0$.
Quelle est l'expression de la pression différentielle $u(x; t)$ *au niveau du microphone? En déduire comment varie la pression différentielle en fonction du temps au point d'abscisse* $x'_1 = -0{,}85$ m.

d) *Le microphone est à nouveau sur* x'x, *au point d'abscisse* x_1. *la courbe* ② *a l'allure indiquée sur la figure.*
On déplace le microphone sur une surface sphérique Σ, *de centre* HP, *de rayon* x_1.
Que peut-on dire de la courbe ②? *Comment s'appelle une telle surface?*

S 58. *a)* • Une oscillation s'étale horizontalement sur 4 divisions, la période T du générateur BF, donc du son, est $T = 0{,}25$ ms/div × 4 div = 1 ms = 10^{-3} s.
La fréquence N du son est donc $N = \frac{1}{T} = 10^3$ Hz.

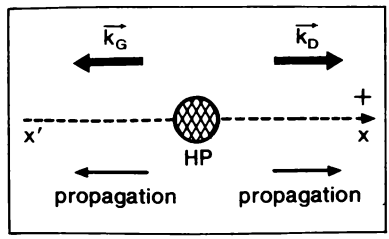
b) α) Les courbes ① et ② correspondent à des vibrations synchrones (c'est-à-dire de même fréquence) en opposition de phase puisque les maxima de l'une correspondent aux minima de l'autre.

β) • Suivons l'évolution de la courbe ② lorsque l'abscisse x du micro varie :
— pour x_1, ② et ① sont en opposition de phase (c'est ce qui est représenté sur la figure);
— pour $x_1 + \frac{\lambda}{2}$, ② devient en phase avec ①;
— pour $x_1 + \lambda$, ② revient en opposition de phase avec ①;
— pour $x_1 + \frac{3\lambda}{2} = x_2$, ② est à nouveau en phase avec ①.

• Par suite $x_2 - x_1 = \frac{3\lambda}{2}$, d'où $\lambda = \frac{2(x_2 - x_1)}{3} = 0{,}34$ m.

Comme $\lambda = \frac{v}{N}$, la célérité v du son $v = \lambda N = 340$ m·s^{-1}.

c) α) • La propagation du son s'effectue, pour $x > 0$, dans le sens + de l'axe. Le vecteur d'onde correspondant à cette propagation vers la droite, $\overrightarrow{k_D}$, a donc une mesure algébrique positive : $\overline{k_D} = \frac{2\pi}{\lambda}$.



• Comme pour $x = 0$, $u(0; t) = 10^{-2} \cos 2\pi Nt$; pour x positif, quelconque :

$$u(x; t) = 10^{-2} \cos(2\pi Nt - \overline{k_D} x) = 10^{-2} \cos\left(2 \cdot 10^3 \pi t - \frac{2\pi}{0{,}34} x\right)$$

• Pour $x_1 = 0{,}85$ m,
$$u(0{,}85 \text{ m}; t) = 10^{-2} \cos\left(2 \cdot 10^3 \pi t - \frac{2\pi \times 0{,}85}{0{,}34}\right)$$
$$= 10^{-2} \cos(2 \cdot 10^3 \pi t - 5\pi)$$
$$= -10^{-2} \cos 2 \cdot 10^3 \pi t.$$

• Remarque : on trouve que $u(0{,}85 \text{ m}; t)$ est en opposition de phase avec $u(0; t)$, c'est ce que les 2 courbes tracées nous avaient appris.

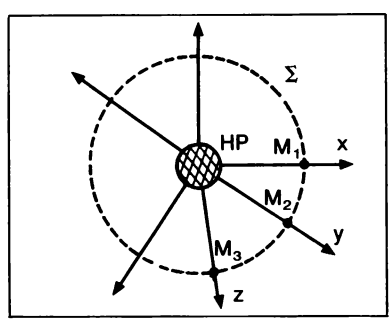
β) • La propagation du son s'effectue, pour $x < 0$, dans le sens − de l'axe. Le vecteur d'onde correspondant à cette propagation vers la gauche, $\overrightarrow{k_G}$, a donc une mesure algébrique négative : $\overline{k_G} = \frac{-2\pi}{\lambda}$.

• Pour x négatif, quelconque,
$$u(x; t) = 10^{-2} \cos(2\pi Nt - \overline{k_G} x)$$
$$= 10^{-2} \cos\left(2 \cdot 10^3 \pi t + \frac{2\pi}{0{,}34} x\right).$$

• Pour $x'_1 = -0{,}85$ m,
$$u(-0{,}85 \text{ m}; t) = 10^{-2} \cos(2 \cdot 10^3 \pi t - 5\pi)$$
$$= -10^{-2} \cos 2 \cdot 10^3 \pi t.$$

• Remarque : on trouve ainsi que $u(x_1; t)$ et $u(x'_1; t)$ sont en phase.

d) Considérons les points M_1, M_2, M_3, ... des rayons d'onde (HP, x), (HP, y), (HP, z), ... Pour passer de HP à M_1, M_2, M_3, ... en suivant les rayons d'onde, l'onde progressive met le même temps de parcours $\theta = \frac{x_1}{v}$ (x_1 étant le rayon de Σ) :



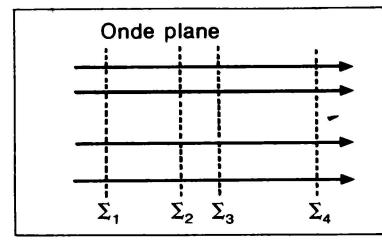
— tous ses points reproduisent à la date t l'état vibratoire qu'avait HP à la date $(t - \theta)$: ils sont donc tous en concordance de phase, en déplaçant le microphone sur Σ la courbe ② reste stabilisée;
— tous les points de Σ appartiennent à la même surface d'onde; on dit que de HP part une onde progressive sinusoïdale sphérique.

82 Les surfaces d'onde.

• Soit S une source vibratoire ponctuelle. Considérons des points M_1, M_2, M_3 ... des rayons d'onde Sx, Sy, Sz, ...; ces points sont tels que pour passer de S à M_1, de S à M_2, de S à M_3, ... en suivant les rayons d'onde, l'onde mette le même temps de parcours θ. Nous dirons alors que ces points appartiennent à une même surface d'onde.

• Si le milieu est homogène, les points M_1, M_2, M_3, ... sont situés sur une sphère de centre S, de rayon $v\theta$: l'onde est alors dite sphérique.

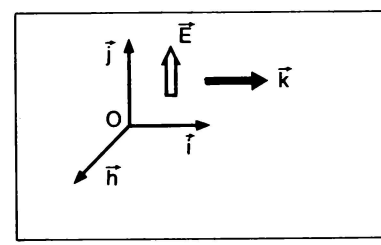
• Si le milieu est homogène et si la source S est très éloignée de la zone étudiée, on peut assimiler les portions des surfaces d'onde de la zone à des morceaux de plans : l'onde est alors dite plane.



• *Propriétés des surfaces d'onde :*
— tous les points d'une même surface d'onde sont en phase;
— si deux surfaces d'onde sont séparées, suivant les rayons d'onde, d'une distance $d = n\lambda$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, les points des deux surfaces sont en phase;
— les rayons d'onde sont perpendiculaires aux lignes d'onde, par suite les vecteurs d'onde sont perpendiculaires aux surfaces d'onde.

E 59. *Une onde électromagnétique progressive plane a un vecteur d'onde* $\vec{k}$ *de coordonnées, dans la base* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{h})$

$$\vec{k} \begin{vmatrix} +420 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$



a) *Cette onde est produite par une source ponctuelle S très éloignée, le milieu de propagation est de l'air.*

α) *Dans quelle direction se situe* S?

β) *Quelle est la fréquence de l'onde? La célérité des ondes électromagnétiques dans l'air est très voisine de* $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

b) *Cette onde plane est polarisée rectilignement, c'est-à-dire que le vecteur* $\vec{E}$ *vibre en restant parallèle à* $\vec{j}$, *on prend comme grandeur caractéristique* u *la mesure algébrique de* $\vec{E}$ *telle que* $\vec{E} = u\vec{j}$.
En O, *point origine de la base, grâce au choix de la date* $t = 0$, $u(0; 0; 0; t) = 10^{-5} \cos 2\pi Nt$, *l'amplitude étant en* $V \cdot m^{-1}$, le temps en s.

α) *Quelle est la grandeur caractéristique en* M(x, y, z)?

β) *On considère le plan d'onde passant par* O. *Quels sont les plans d'ondes équiphases de ce plan (c'est-à-dire ayant des points en phase avec les points de ce plan)?*

S 59. *a)* α) L'onde se propage dans la direction et le sens du vecteur d'onde $\vec{k}$, donc du vecteur unitaire $\vec{i}$: la source S est donc dans la direction de $\vec{i}$, très loin dans le sens opposé à celui de $\vec{i}$.

β) • La norme du vecteur d'onde $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{c} N$, d'où $N = \frac{kc}{2\pi}$.

• Application numérique : $N = \frac{420 \times 3 \cdot 10^8}{2\pi} = 2 \cdot 10^{10}$ Hz.

b) α) Les plans d'onde sont perpendiculaires au vecteur d'onde, donc sont parallèles au plan $(O, \vec{j}, \vec{h})$. Considérons deux points de même abscisse x, mais de y et de z différents : ces deux points appartenant au même plan d'onde ont la même grandeur caractéristique.
En d'autres termes la grandeur caractéristique ne dépend que de x et t : en M(x, y, z), $u(x; t) = 10^{-5} \cos(2\pi Nt - \bar{k}x)$. La propagation s'effectuant dans le sens positif de l'axe des x, $\bar{k} = +k$, par suite :

$$u(x; t) = 10^{-5} \cos(2\pi Nt - kx) = 10^{-5} \cos(4 \cdot 10^{10} \pi t - 420x) \text{ en unités S.I.}$$

β) Les plans d'onde équiphases du plan d'onde $(O, \vec{i}, \vec{h})$ sont parallèles à ce plan et ont les abscisses $x = n\lambda$ avec $n \in \mathbb{Z}^*$. Ainsi x peut prendre les valeurs $x = n\frac{2\pi}{k} = n \times 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ c'est-à-dire $1{,}5 \cdot 10^{-2}$ m; $-1{,}5 \cdot 10^{-2}$ m; $3 \cdot 10^{-2}$ m; $-3 \cdot 10^{-2}$ m, ...

E 60. *(Onde stationnaire illimitée.)*

a) *Une onde 1 progressive, sinusoïdale, plane, se propage le long d'une corde très longue* Ox, *dans le sens positif, à la célérité* v. *Sa fréquence est* N. *Cette onde est caractérisée par l'élongation transversale* $u_1(x; t)$, *mesurée algébriquement à l'aide du vecteur unitaire transversal* $\vec{j}$.
Sachant que pour $x = 0$, $u_1(0; t) = a \cos \omega t$ (*unités :* m *et* s); *en déduire l'expression de* $u_1(x; t)$.

Application numérique : $v = 6$ m·s^{-1}; $N = 30$ Hz; $a = 3 \cdot 10^{-3}$ m.

b) *Une onde 2 progressive, sinusoïdale, plane, de même fréquence, de même amplitude, se propage en sens inverse. On la caractérise par l'élongation transversale* $u_2(x; t)$, *mesurée algébriquement avec le même vecteur unitaire* $\vec{j}$.
Sachant que pour $x = 0$, $u_2(0; t) = a \cos \omega t$, *en déduire l'expression de* $u_2(x; t)$.

c) *Dans une certaine portion de corde ces ondes se superposent. On obtient une onde transversale stationnaire de grandeur caractéristique* u(x; t).

α) *Établir l'expression de* u(x; t).

β) *Que peut-on dire de l'amplitude de l'onde stationnaire? Préciser la position des ventres et des nœuds. Dessiner l'allure de la corde observée en éclairage normal.*

γ) *Que peut-on dire des mouvements vibratoires :*
— des points situés entre deux nœuds?
— des points situés de part et d'autre d'un nœud?
Comment peut-on observer ces mouvements?

S 60. *a)* • L'onde progressive 1 a un vecteur d'onde $\vec{k_1}$, parallèle à Ox, orienté dans le sens positif : sa mesure algébrique sur Ox est $\overline{k_1} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi N}{v}$.

• Comme pour $x=0$, $u_1(0;\,t)=3\cdot10^{-3}\cos 2\pi Nt$; pour x quelconque $u_1(x;\,t)=a\cos(2\pi Nt-\overline{k_1}x)=a\cos\left(2\pi Nt-\dfrac{2\pi x}{\lambda}\right)$.

• Application numérique : $\lambda=\dfrac{v}{N}=0{,}2$ m

$$u_1(x;\,t)=3\cdot10^{-3}\cos(60\pi t-10\pi x).$$

b) • L'onde 2, de même nature que l'onde 1, de même fréquence, se propage à la même célérité v. Son vecteur d'onde $\vec{k_2}$ est orienté dans le sens négatif : sa mesure algébrique sur Ox est $\overline{k_2}=\dfrac{-2\pi}{\lambda}$.

• Comme pour $x=0$, $u_2(0;\,t)=a\cos 2\pi Nt$; pour x quelconque :

$$u_2(x;\,t)=a\cos(2\pi Nt-\overline{k_2}x)=a\cos\left(2\pi Nt+\frac{2\pi x}{\lambda}\right).$$

Numériquement : $u_2(x;\,t)=3\cdot10^{-3}\cos(60\pi t+10\pi x)$.

c) *α)* • En chaque point de la zone où se superposent les ondes progressives 1 et 2, la grandeur vibratoire résultante $u(x;\,t)=u_1(x;\,t)+u_2(x;\,t)$.

Par suite $u(x;\,t)=a\cos\left(2\pi Nt-\dfrac{2\pi x}{\lambda}\right)+a\cos\left(2\pi Nt+\dfrac{2\pi x}{\lambda}\right)$.

• *Première méthode de calcul :* les amplitudes des ondes 1 et 2 étant égales, on peut mettre cette amplitude en facteur, alors :

$$u(x;\,t)=a\left[\cos\left(2\pi Nt-\frac{2\pi x}{\lambda}\right)+\cos\left(2\pi Nt+\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\right].$$

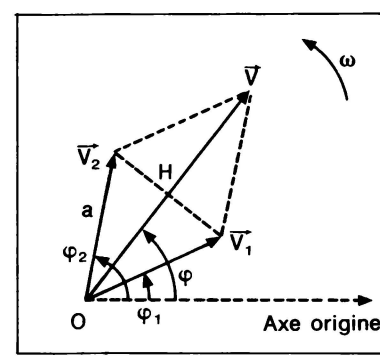
D'après la relation trigonométrique $\cos p+\cos q=2\cos\dfrac{p+q}{2}\cdot\cos\dfrac{p-q}{2}$, il s'ensuit :

$$u(x;\,t)=2a\cos 2\pi Nt\cdot\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\cdot \qquad (1)$$

Numériquement : $u(x;\,t)=6\cdot10^{-3}\cos 60\pi t\cdot\cos 10\pi x$.

• *Deuxième méthode de calcul :* utilisons les vecteurs de Fresnel. Plaçons-nous en un point de x donné, faisons varier t. $u_1(x;\,t)$ est alors une fonction sinusoïdale du temps, d'amplitude a, de phase $\varphi_1=\left(2\pi Nt-2\pi\dfrac{x}{\lambda}\right)$, représentée par le vecteur de Fresnel $\vec{V_1}$.

$u_2(x;\,t)$ est alors une fonction sinusoïdale du temps d'amplitude a, de phase $\varphi_2=\left(2\pi Nt+2\pi\dfrac{x}{\lambda}\right)$, représentée par le vecteur de Fresnel $\vec{V_2}$.



$u(x;\,t)$ est représentée par le vecteur de Fresnel $\vec{V}=\vec{V_1}+\vec{V_2}$.

Comme le parallélogramme construit avec $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ est un losange, $\vec{V}$ est porté par la bissectrice de l'angle $(\vec{V_1}, \vec{V_2})$:

— la phase φ de $\vec{V}$ est $\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$, comme φ_1 et φ_2 sont définies à 2π rad près, φ est définie à π rad près : $\varphi = (2\pi Nt + n\pi)$ avec $n \in \mathbb{Z}$;

— l'amplitude $\mathcal{A}$ de $\vec{V}$ est $\mathcal{A} = 2 \cdot OH = 2a \left| \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right| = 2a \left| \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right|$.

Le vecteur $\vec{V}$ représente donc la fonction sinusoïdale :

$$u(x; t) = 2a \left| \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right| \cdot \cos(2\pi Nt + n\pi).$$

Nous admettrons que cette expression est équivalente à :

$$u(x; t) = 2a \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \cos 2\pi Nt$$

(on a retiré la valeur absolue et $n\pi$).

β) • $u(x; t)$ est fonction sinusoïdale de x et fonction sinusoïdale de t.

• Pour un point d'abscisse x déterminée, la grandeur caractéristique est uniquement fonction sinusoïdale de t, d'amplitude $\mathcal{A}(x) = 2a \left| \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right|$, cette amplitude est notée $\mathcal{A}(x)$ car elle dépend de l'abscisse x du point considéré : c'est une première différence importante avec une onde progressive pour laquelle l'amplitude est constante.

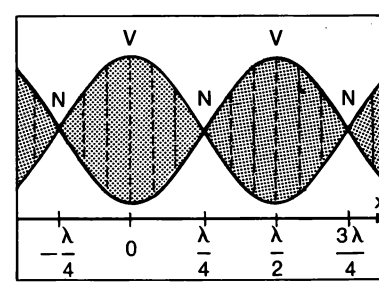
• Un point est un ventre d'élongation lorsque l'amplitude de ce point est maximale. Pour les ventres $\left| \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right| = 1$, $\cos \frac{2\pi x}{\lambda} = \pm 1$, $\frac{2\pi x}{\lambda} = n\pi$ avec $n \in \mathbb{Z}$, d'où $x = n\frac{\lambda}{2}$: les ventres sont à $\frac{\lambda}{2}$ les uns des autres.

Avec les valeurs numériques données, les ventres d'élongation sont équidistants de $\frac{\lambda}{2} = 0{,}10$ m.

• Un point est un nœud d'élongation lorsque l'amplitude de ce point est minimale (nulle lorsque les amplitudes des ondes qui se superposent sont égales). Pour les nœuds $\cos \frac{2\pi x}{\lambda} = 0$; $\frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{\pi}{2} + n\pi$ avec $n \in \mathbb{Z}$, d'où $x = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2}$: les nœuds sont séparés de $\frac{\lambda}{2}$ les uns des autres et sont situés symétriquement par rapport aux ventres.

• Les points de corde vibrent transversalement à la fréquence N, la longueur du segment décrit par un point d'abscisse x est $2\mathcal{A}(x)$.

Le mouvement des points de corde étant rapide, l'œil garde en mémoire leurs diverses positions : la corde prend l'aspect de fuseaux de largeur maximale aux ventres d'élongation, de largeur nulle aux nœuds d'élongation.



γ) • Présentation de la démarche : les grandeurs caractéristiques en M_1 d'abscisse x_1 et en M_2 d'abscisse x_2, $u(x_1; t) = 2a \cos \frac{2\pi x_1}{\lambda} \cdot \cos 2\pi Nt$ et $u(x_2; t) = 2a \cos \frac{2\pi x_2}{\lambda} \cdot \cos 2\pi Nt$, sont des fonctions sinusoïdales du temps de même fréquence :

— elles sont en phase si $\cos \frac{2\pi x_1}{\lambda}$ et $\cos \frac{2\pi x_2}{\lambda}$ sont de même signe;

— elles sont en opposition de phase si $\cos \frac{2\pi x_1}{\lambda}$ et $\cos \frac{2\pi x_2}{\lambda}$ sont de signes contraires.

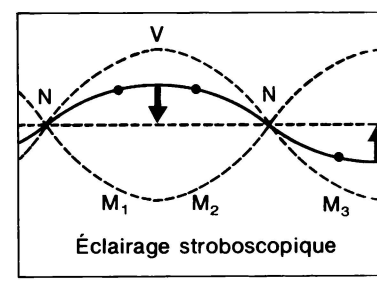
Lorsque x croît, $\cos \frac{2\pi x}{\lambda}$ s'annule en changeant de signe chaque fois que l'on rencontre un nœud. Par suite entre deux nœuds consécutifs $\cos \frac{2\pi x}{\lambda}$ garde un signe constant : tous les points d'un même fuseau vibrent donc en concordance de phase (c'est-à-dire qu'ils passent en même temps par leur position la plus basse, en même temps par leur position la plus haute, ...).

Au contraire, deux points situés de part et d'autre d'un nœud ont leur $\cos \frac{2\pi x}{\lambda}$ de signes opposés : ils vibrent en opposition de phase.

• *Remarque :* Le déphasage entre deux points d'une onde stationnaire est donc $n\pi$: les points sont en phase lorsque n est nul ou pair, les points sont en opposition de phase lorsque n est impair. Nous retrouvons le résultat dégagé par la méthode des vecteurs de Fresnel, la phase temporelle d'une onde stationnaire est la même pour tous les points à π près (elle vaut $\varphi = 2\pi Nt + n\pi$).

Au contraire le déphasage entre deux points d'une onde progressive dépend de la distance séparant les deux points, il peut prendre n'importe quelle valeur : c'est la deuxième différence importante entre une onde stationnaire et une onde progressive.

• Pour observer le mouvement transversal des points de corde, il suffit d'éclairer avec un stroboscope émettant des éclairs à une fréquence N_e légèrement inférieure à N : on observe alors au ralenti les mouvements transversaux dans le sens des mouvements réels.



Éclairage stroboscopique

On constate que la corde à l'allure d'une sinusoïde. (C'est normal puisqu'à un instant t_1 donné, $u(x; t_1) = 2a \cos 2\pi Nt_1 \cdot \cos \frac{2\pi x}{\lambda}$ est une fonction sinusoïdale de x, d'amplitude $2a|\cos 2\pi Nt_1|$.)

Cette sinusoïde s'aplatit puis se gonfle alternativement sur place, semblant fixée aux nœuds : c'est pour cela qu'on dit que l'onde est stationnaire.

On vérifie facilement que les points M_1 et M_2 par exemple vibrent en phase, que M_2 et M_3 vibrent en opposition de phase.

83 **La fonction d'onde stationnaire sinusoïdale.**

• Généralisons les résultats dégagés dans l'exercice précédent.

• Une onde stationnaire plane résulte de la superposition de deux ondes progressives sinusoïdales, de même nature, de même fréquence, cheminant dans la même direction, en sens inverse.

• Soit une onde stationnaire plane repérée le long d'un axe Ox perpendiculaire aux plans d'onde. La grandeur caractéristique de l'onde stationnaire peut se mettre sous la forme de :

$$u(x; t) = A \cos(kx + \alpha) \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

A : amplitude maximale;
α : constante qui corrige éventuellement la phase spatiale kx, est déterminée par le choix de l'origine des espaces;
φ : constante qui corrige éventuellement la phase temporelle ωt, est déterminée par le choix de l'origine des temps.

• L'amplitude des points du plan d'onde d'abscisse x est fonction de x : $\mathcal{A}(x) = A|\cos(kx + \alpha)|$. Cette amplitude est :

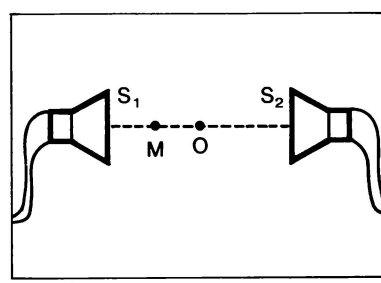
— maximale, égale à A, pour les *ventres* appartenant aux plans ventraux dont les abscisses diffèrent de $\frac{\lambda}{2}$ les unes des autres;

— minimale (souvent nulle) pour les *nœuds* appartenant aux plans nodaux dont les abscisses diffèrent de $\frac{\lambda}{2}$ les unes des autres et qui sont régulièrement intercalés entre les plans ventraux.

• Entre deux plans nodaux consécutifs les vibrations sont en phase; de part et d'autre d'un plan nodal elles sont en opposition de phase.

E 61. *Deux hauts-parleurs identiques* S_1 *et* S_2, *de même axe, orientés l'un vers l'autre, sont alimentés par le même générateur. Ils émettent des vibrations en phase, de même amplitude. Au milieu* O *de* S_1S_2, *chacune des vibrations crée des variations de pression de l'air* $\Delta p_1(0; t)$ *et* $\Delta p_2(0; t)$ *telles que* :

$$\Delta p_1(0; t) = \Delta p_2(0; t) = p_m \sin 2\pi Nt.$$



a) *Donner les expressions* $\Delta p_1(x; t)$ *et* $\Delta p_2(x; t)$ *des variations de pression, au point* M *d'abscisse* x, *dues à chacune des deux ondes progressives se propageant seule. Donner ensuite l'expression* $\Delta p(x; t)$ *de la variation de pression au point* M *due à la superposition de ces deux ondes (on négligera tout phénomène de réflexion).*

b) *A quelles distances de* O *se trouvent les quatre points d'amplitude nulle les plus proches de ce point* O?

Application numérique : N = 2 500 Hz (vibration sonore)
célérité dans l'air : $v = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

(D'après bac)

S 61. *a)* • Le vecteur d'onde $\overrightarrow{k_1}$, de l'onde progressive venant de S_1, a une mesure algébrique $\overline{k_1} = \frac{2\pi}{\lambda}$ avec $\lambda = \frac{v}{N}$.

Comme $\Delta p_1(0; t) = p_m \sin 2\pi Nt$,

$$\Delta p_1(x; t) = p_m \sin(2\pi Nt - \overline{k_1} x) = p_m \sin\left(2\pi Nt - \frac{2\pi}{\lambda} x\right).$$

• Le vecteur d'onde $\overrightarrow{k_2}$, de l'onde progressive venant de S_2, a une mesure algébrique $\overline{k_2} = \frac{-2\pi}{\lambda}$.

Comme $\Delta p_2(0; t) = p_m \sin 2\pi Nt$,

$$\Delta p_2(x; t) = p_m \sin(2\pi Nt - \overline{k_2} x) = p_m \sin\left(2\pi Nt + \frac{2\pi x}{\lambda}\right).$$

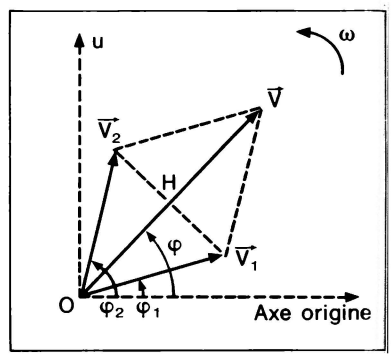
• La variation de pression résultante $\Delta p(x; t) = \Delta p_1(x; t) + \Delta p_2(x; t)$, par suite :

$$\Delta p(x; t) = p_m \left[\sin\left(2\pi Nt - \frac{2\pi}{\lambda} x\right) + \sin\left(2\pi Nt + \frac{2\pi x}{\lambda}\right)\right.$$

• *Première méthode de calcul :* d'après la relation trigonométrique $\sin p + \sin q = 2 \cos \frac{p-q}{2} \cdot \sin \frac{p+q}{2}$, par suite :

$$\Delta p(x; t) = 2 p_m \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \sin 2\pi Nt.$$

• *Deuxième méthode de calcul :* par les vecteurs de Fresnel.
Plaçons-nous en un point de x donné, faisons varier t.
$\Delta p_1(x; t)$ est alors une fonction sinusoïdale du temps, d'amplitude p_m, de phase $\varphi_1 = \left(2\pi Nt - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$, représentée par le vecteur de Fresnel $\overrightarrow{V_1}$. $\Delta p_2(x; t)$ est alors une fonction sinusoïdale du temps, d'amplitude p_m, de phase $\varphi_2 = \left(2\pi Nt + \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$, représentée par le vecteur de Fresnel $\overrightarrow{V_2}$.



$\Delta p(x; t)$ est représentée par le vecteur de Fresnel $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}$. Comme le parallélogramme construit avec $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ est un losange, $\overrightarrow{V}$ est porté par la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2})$:

— la phase φ de $\overrightarrow{V}$ est $\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = 2\pi Nt$ (modulo π) $= 2\pi Nt + n\pi$;

— l'amplitude $\mathcal{A}$ de Δp est $\mathcal{A} = 2 \cdot OH = 2 p_m \left|\cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right| = 2 p_m \left|\cos \frac{2\pi x}{\lambda}\right|$.

Le vecteur $\overrightarrow{V}$ représente la fonction sinusoïdale :

$$\Delta p(x; t) = 2 p_m \left|\cos \frac{2\pi x}{\lambda}\right| \cdot \sin(2\pi Nt + n\pi)$$

équivalente à $\Delta p(x; t) = 2 p_m \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \sin 2\pi Nt$.

Notons que dans cette construction de Fresnel, c'est la fonction sinus qui a été utilisée pour les trois vecteurs $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ et $\vec{V_3}$ (cela signifie qu'on passe des vecteurs aux fonctions sinusoïdales par projection sur l'axe Ou perpendiculaire à l'axe origine des phases). Dans l'exercice précédent, c'est la fonction cosinus qui avait été utilisée pour les 3 vecteurs.

• *Remarque.* Montrons que la fonction d'onde stationnaire :

$$\Delta p(x; t) = A \cos(kx + \alpha) \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

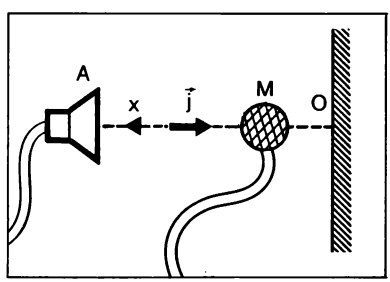
conduit aussi à la même expression.
D'une part $A = 2p_m$: c'est l'amplitude maximale de pression.
D'autre part pour déterminer α et φ, considérons l'état vibratoire du point origine :
— d'après la fonction précédente $\Delta p(0; t) = 2p_m \cos \alpha \cdot \cos(\omega t + \varphi)$;
— d'après les données de l'énoncé :
$\Delta p(0; t) = \Delta p_1(0; t) + \Delta p_2(0; t) = 2p_m \sin \omega t$.
Par identification, on en déduit : $\cos \alpha = 1$, donc on peut prendre $\alpha = 0$ et $\cos(\omega t + \varphi) = \sin \omega t$.
Reportons dans la fonction d'onde stationnaire, on obtient bien $\Delta p(x; t) = 2p_m \cos kx \cdot \sin \omega t$.

b) • Les points d'amplitude nulle sont des nœuds de pression, leur abscisse est telle que $\cos \frac{2\pi x}{\lambda} = 0$, d'où $\frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{\pi}{2} + n\pi$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Par suite $x = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2}$.

• Les quatre nœuds les plus proches de O ont pour abscisses $\frac{\lambda}{4}$ $(n = 0)$; $-\frac{\lambda}{4}$ $(n = -1)$; $3\frac{\lambda}{4}$ $(n = 1)$; $-3\frac{\lambda}{4}$ $(n = -2)$.

• Numériquement : $\lambda = \frac{v}{N} = 0{,}136$ m; les 4 nœuds ont donc pour abscisses 3,4 cm; $-3{,}4$ cm; 10,2 cm; $-10{,}2$ cm.

E 62. *Un haut-parleur, alimenté par un générateur électrique basse fréquence* (BF), *émet des ondes sonores incidentes, pratiquement planes suivant l'axe* AO *du haut-parleur, de longueur d'onde* $\lambda = 0{,}21$ m.
On place en O, *perpendiculairement à* AO, *une surface réfléchissant parfaitement les ondes sonores : l'onde réfléchie est plane suivant* AO.
On considère l'onde stationnaire provenant de la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie sur l'obstacle. On négligera tout amortissement.



a) *La grandeur caractéristique choisie est la pression différentielle* $\Delta p(x; t)$.
Rappelons que si on appelle p_0 *la pression de l'air au repos,* $p(x; t)$ *la pression de l'air au point d'abscisse* x *à la date* t, $\Delta p(x; t) = p(x; t) - p_0$.

α) *S'il n'y avait pas d'obstacle en* O, *la variation de pression due à l'onde incidente serait* $\Delta p_i(0; t) = p_m \cos \omega t$ *avec* $\omega = 10^4$ rad·s^{-1}.
Quel serait $\Delta p_i(x; t)$?

β) *Sachant qu'il n'y a pas de changement de signe de la variation de pression sur l'obstacle en* O, *en déduire la variation de pression due à l'onde réfléchie en* O, $\Delta p_r(0; t)$. *Puis établir l'expression de* $\Delta p_r(x; t)$.

γ) *Quelle est la fonction d'onde* $\Delta p(x; t)$?

δ) *On déplace un microphone* M *(de très petites dimensions pour ne pas perturber l'onde stationnaire) le long de* OA. *Ce microphone est sensible aux variations de pression, pour quelles positions détecte-t-il un son maximum?*

b) *La grandeur caractéristique choisie maintenant est l'élongation longitudinale* y *des tranches d'air* y(x; t), *mesurée à l'aide du vecteur unitaire longitudinal* $\vec{j}$.

α) *Avec la même origine des temps que celle considérée au* a), *on montre que l'élongation qu'il y aurait en* O *s'il n'y avait pas d'obstacle, sous l'action de l'onde incidente serait* $y_i(0; t) = a \sin \omega t$.
Quel serait $y_i(x; t)$?

β) *Sous l'action de l'onde incidente et de l'onde réfléchie, que fait la tranche d'air située en* O? *En déduire* $y_r(0; t)$ *puis* $y_r(x; t)$.

γ) *Quelle est la fonction d'onde* y(x; t)?

δ) *Pour quelles valeurs de* x *rencontre-t-on des nœuds d'élongation. Conclure en comparant au résultat du* a) δ).

S 62. *a*) α) Réponse : $\Delta p_i(x; t) = p_m \cos(\omega t + kx)$ avec $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = 29{,}9$ rad·m^{-1}.

β) • Puisqu'il n'y a pas de changement de signe de la variation de pression sur l'obstacle $\Delta p_r(0; t) = \Delta p_i(0; t)$.

• L'onde progressive réfléchie se propage dans le sens positif, donc on trouvera que $\Delta p_r(x; t) = p_m(\cos \omega t - kx)$.

γ) • $\Delta p(x; t) = \Delta p_i(x; t) + \Delta p_r(x; t)$.
D'où $\Delta p(x; t) = p_m[\cos(\omega t + kx) + \cos(\omega t - kx)]$.

• D'après la relation trigonométrique $\cos p + \cos q = 2 \cos \dfrac{p+q}{2} \cdot \cos \dfrac{p-q}{2}$;
il s'ensuit :

$$\Delta p(x; t) = 2 p_m \cos \omega t \cdot \cos kx.$$

(On peut aussi utiliser les vecteurs de Fresnel, revoir S 60.)

δ) • Le microphone détecte un son maximum aux ventres de pression, c'est-à-dire aux points où l'amplitude de pression $\mathcal{P}(x) = 2 p_m |\cos kx|$ est maximale.
Donc pour les points d'abscisse x telle que $\cos kx = \pm 1$, soit $kx = n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}$ puisque $x \geqslant 0$. D'où $x = n \dfrac{\pi}{k} = \dfrac{n\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}} = n \dfrac{\lambda}{2} = n \times 0{,}105$ en m.

Remarquons que pour $n = 0$, on trouve que le point O est un ventre de pression, c'est-à-dire qu'il s'établit un plan ventral de pression au niveau de l'obstacle.

b) α) Réponse : $y_i(x; t) = a \sin(\omega t + kx)$.

β) • Sous l'action de l'onde incidente et de l'onde réfléchie la tranche d'air en O reste immobile, plaquée contre l'obstacle. Par suite :

$$y(0; t) = 0 \text{ quel que soit } t.$$

Comme $y(0; t) = y_i(0; t) + y_r(0; t)$, il en découle que $y_r(0; t) = -y_i(0; t)$: on dit qu'il y a changement de signe des élongations sur l'obstacle rigide.

• Comme en O, $y_r(0; t) = -a \sin \omega t = a \sin(\omega t + \pi)$, en un point x, en remarquant que l'onde réfléchie progresse dans le sens positif, $y_r(x; t) = a \sin(\omega t - kx + \pi)$.

γ) • La nouvelle fonction d'onde stationnaire, avec la grandeur caractéristique élongation est, $y(x; t) = y_i(x; t) + y_r(x; t)$.

D'où $y(x; t) = a[\sin(\omega t + kx) + \sin(\omega t - kx + \pi)]$.

• D'après la relation trigonométrique $\sin p + \sin q = 2 \cos \frac{p-q}{2} \cdot \sin \frac{p+q}{2}$;

$$y(x; t) = 2a \cos\left(kx - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right);$$

soit $y(x; t) = 2a \sin kx \cdot \cos \omega t$.

δ) • L'amplitude d'élongation longitudinale $\mathcal{E}(x) = 2a|\sin kx|$. Elle est nulle pour les nœuds d'élongation d'abscisse x telle que $\sin kx = 0$, soit telle que $kx = n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}$ puisque $x \geqslant 0$. D'où $x = n\frac{\pi}{k} = n\frac{\lambda}{2}$.

Remarquons que pour $n = 0$, on trouve que le point O est un nœud d'élongation; c'est-à-dire qu'il s'établit un plan nodal d'élongation au niveau de l'obstacle.

• En comparant avec les résultats du *a*), on en déduit que pour une onde stationnaire longitudinale les nœuds d'élongation sont des ventres de pression. On montrerait de même que les ventres d'élongation sont des nœuds de pression.

84 Condition imposée par une frontière limitant une onde stationnaire.

• Une onde stationnaire peut prendre naissance par superposition d'une onde progressive incidente et de son onde réfléchie sur la frontière du milieu de propagation.

• La frontière impose une condition, limitons-nous à mémoriser cette condition dans le cas des ondes élastiques.

Grandeur caractéristique	La frontière est un obstacle rigide	La frontière est une extrémité libre
élongation y (transversale ou longitudinale)	changement de signe de y : nœud d'élongation à la frontière	pas de changement de signe de y : ventre d'élongation à la frontière

Grandeur caractéristique	La frontière est un obstacle rigide	La frontière est une extrémité libre
variation de pression Δp (onde longitudinale dans un fluide)	pas de changement de signe de Δp : ventre de pression à la frontière	changement de signe de Δp : nœud de pression à la frontière
• **Conséquence :** dans une onde longitudinale, les nœuds d'élongation longitudinale sont des ventres de pression, les ventres d'élongation longitudinale sont des nœuds de pression.		

E 63. *(Des oscillateurs à multiples fréquences propres.)*

a) *Une corde de longueur* $\ell = 0{,}8$ m *est tendue entre deux points fixes* A *et* B. *Sa masse linéique est* $\mu = 10^{-2}$ kg·m^{-1}, *sa tension est* $F = 400$ N.
Pour lui faire accomplir des oscillations libres transversales, on l'écarte transversalement de sa position d'équilibre et on la laisse aller.
La corde émet un son de fréquence N_0, *non sinusoïdal (dit son complexe). Ce son analysé peut être considéré comme résultant de la superposition d'un son sinusoïdal de fréquence* N_0 *(dit son fondamental) et de sons sinusoïdaux de fréquences multiples de* N_0 *(dits sons harmoniques).*
Expliquer et déterminer N_0.

Donnée : la célérité des vibrations transversales le long d'une corde est $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$.

b) *Un tuyau sonore* A'B', *de longueur* $\ell' = 0{,}6$ m, *comprend à sa base* A' *une embouchure dite embouchure à anche, l'extrémité* B' *est ouverte à l'air libre.*
On souffle dans l'embouchure pour mettre en vibration longitudinale la colonne d'air contenue dans le tuyau.
Le tuyau émet un son complexe de fréquence N'_0, *superposition d'un son sinusoïdal fondamental de fréquence* N'_0 *et de sons sinusoïdaux harmoniques de fréquences* $n'N'_0$. *Expliquer et déterminer* N'_0. *Que peut-on dire de* n'?

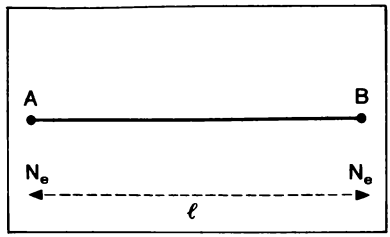
Données :
— *la célérité du son dans l'air du tuyau est* $v = 340$ m·s^{-1};
— *l'embouchure à anche se comporte pour la colonne d'air du tuyau comme un obstacle pratiquement fixe.*

c) *Un tuyau sonore* A"B", *de longueur* $\ell'' = 0{,}6$ m, *comprend à sa base* A" *une embouchure dite embouchure de flûte et un trou* T *au milieu de* A"B", *son extrémité* B" *est ouverte à l'air libre.*
On souffle dans l'embouchure pour mettre en vibration longitudinale l'air du tuyau.
Le tuyau émet un son complexe de fréquence N''_0, *superposition d'un son sinusoïdal fondamental de fréquence* N''_0 *et de sons sinusoïdaux harmoniques de fréquences* $n''N''_0$. *Expliquer et déterminer* N''_0. *Que peut-on dire de* n"?

Données :
— *la célérité du son dans l'air du tuyau est* $v = 340$ m·s^{-1};
— *l'embouchure de flûte* A" *se comporte, pour la colonne d'air contenue dans le tuyau, comme si l'extrémité* A" *était ouverte à l'air libre;*
— *au niveau du trou* T, *en communication avec l'air atmosphérique, la pression reste égale à la pression atmosphérique : il s'établit un nœud de pression.*

S 63. *a)* • Le milieu de propagation est la corde.

• La célérité des ondes transversales dans ce milieu est $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = 200\ m \cdot s^{-1}$.



• Le milieu limité par deux frontières, en A et en B, va être balayé par des ondes se réfléchissant en A et en B et dont la superposition donne des ondes stationnaires.

• Les frontières imposent, puisque ce sont des obstacles, des nœuds d'élongation transversales N_e.

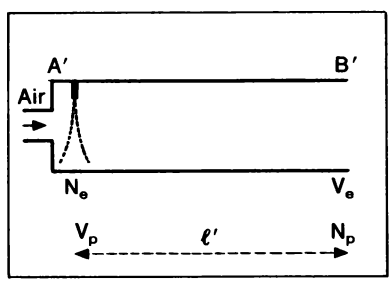
• La distance entre deux nœuds étant un multiple de demi-longueurs d'onde (revoir ℳ 83), les ondes stationnaires ont des longueurs d'onde λ telles que $\ell = n\frac{\lambda}{2}$ (avec n, nombre entier positif), donc ont des fréquences N telles que $\ell = n\frac{v}{2N}$ soit $N = n\frac{v}{2\ell} = n\frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$.

• Pour $n = 1$, la fréquence la plus faible est $N_0 = \frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{F}{\mu}} = 125$ Hz (l'onde stationnaire fondamentale ne présente qu'un seul fuseau).

• Pour $n \geqslant 2$, nous obtenons la fréquence des harmoniques.

b) • Le milieu de propagation est la colonne d'air contenue dans le tuyau A'B'.

• La célérité des ondes sonores (longitudinales) dans ce milieu est $v = 340\ m \cdot s^{-1}$.



• Le milieu limité par deux frontières, en A' et B', va être balayé par des ondes se réfléchissant en A' et en B' et dont la superposition donne des ondes stationnaires.

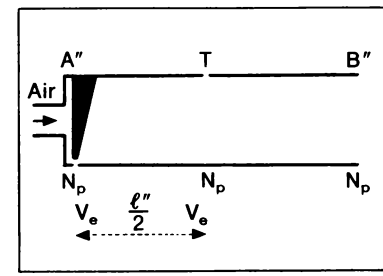
• Les frontières imposent :
— l'une A', un nœud d'élongation longitudinale (ou un ventre de pression) puisque la anche se comporte comme un obstacle fixe;
— l'autre B', un ventre d'élongation longitudinale (ou un nœud de pression) puisque c'est une extrémité libre.

• La distance entre un nœud et un ventre de la même grandeur caractéristique est de la forme $\frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2}$, avec $n \in \mathbb{N}$. Par suite les ondes stationnaires ont des longueurs d'onde λ telles que $\ell' = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2}$, donc des fréquences N telles que $\ell' = \frac{v}{4N} + n\frac{v}{2N}$ soit $N = \frac{v}{4\ell'} + n\frac{v}{2\ell'}$.

• Pour $n = 0$, la fréquence la plus faible est celle du fondamental $N'_0 = \frac{v}{4\ell'} =$ 142 Hz.

• Pour $n \geqslant 1$, on détermine la fréquence des harmoniques : $N = N'_0 + 2nN'_0$, soit $N = (2n+1)N'_0$. On n'obtient que des harmoniques impairs : le nombre n' donné par l'énoncé est donc un nombre entier impair, supérieur ou égal à 3.

c) • Le milieu de propagation est la colonne d'air contenue dans le tuyau A″B″.



• La célérité des ondes sonores (longitudinales) est $v = 340\ m \cdot s^{-1}$.

• Le milieu limité par deux frontières, en A″ et B″, va être balayé par des ondes se réfléchissant en A″ et en B″ et dont la superposition donne des ondes stationnaires.

• Trois conditions sont imposées à ces ondes stationnaires :

— l'extrémité A″ se comportant comme une extrémité libre (il y a une ouverture) impose un nœud de pression (donc un ventre d'élongation longitudinale);

— l'orifice T impose un nœud de pression;

— l'extrémité B″, libre, impose aussi un nœud de pression.

• Les ondes stationnaires qui prennent naissance ont des longueurs d'onde λ telles que $\frac{\ell''}{2} = n\frac{\lambda}{2}$ (n, nombre entier positif), donc des fréquences N telles que $\ell'' = n\frac{V}{N}$ soit $N = n\frac{V}{\ell''}$.

• Pour $n = 1$, la fréquence la plus faible est celle du fondamental $N'_0 = \frac{V}{\ell''} =$ 567 Hz.

• Pour $n \geqslant 2$, on détermine la fréquence des harmoniques $N = nN''_0$ (le nombre n″ donné par l'énoncé est donc un nombre entier supérieur ou égal à 2).

E 64. *(Les diverses fréquences de résonance d'une corde limitée, en oscillations forcées : expérience de Melde.)*
Une corde métallique AB, *de longueur* $\ell = 1$ m, *est placée horizontalement. L'extrémité* A *est solidaire d'une lame vibrante qui peut lui imposer un mouvement transversal, sinusoïdal, de fréquence réglable* N, *d'amplitude* a. *L'autre extrémité* B *est accrochée à un point fixe. Sur la corde ainsi tendue les vibrations transversales se propagent à la célérité* $v = 90\ m \cdot s^{-1}$.

a) *La lame est immobile. On écarte transversalement la corde de sa position d'équilibre, à quelles fréquences peut-elle a priori osciller librement?*

b) *La lame met la corde en oscillations transversales forcées. On constate que pour certaines fréquences de résonance bien déterminées formant la suite discontinue* N_1, N_2, N_3, ... *une onde stationnaire s'établit le long de la corde présentant un ou des fuseaux fixes, de largeur aux ventres très supérieure à l'amplitude* a *de la lame, à tel point qu'on pourra considérer que l'extrémité* A *est pratiquement un nœud.*
Déterminer ces fréquences de résonance. Dessiner l'allure de la corde, en éclairage continu, pour les fréquence N_1 *et* N_2.

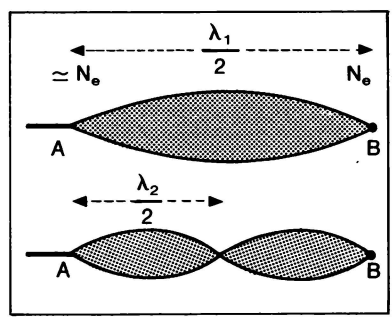
S 64. *a*) La corde élastique, limitée en A et en B, est un oscillateur élastique. Cette corde balayée par des ondes se réfléchissant en A et en B est le siège d'ondes stationnaires présentant un nœud d'élongation en A et un nœud d'élongation en B. Les ondes stationnaires qui peuvent s'établir ont donc des longueurs d'onde λ telles que $\ell = n\dfrac{\lambda}{2}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. La corde peut donc vibrer aux fréquences propres N_0, telles que $\ell = n\dfrac{v}{2N_0}$, soit $N_0 = n\dfrac{v}{2\ell}$.

Par suite $N_0 \in \{45 \text{ Hz}; 90 \text{ Hz}; 135 \text{ Hz}; ...\}$. La corde est donc un oscillateur ayant une fréquence propre quantifiée, c'est-à-dire qui ne peut prendre que des valeurs bien déterminées formant une suite discontinue.

b) • Soit N la fréquence de la lame accrochée en A à la corde. La lame impose aux divers points de corde un mouvement transversal de fréquence N : la corde est en régime d'oscillations forcées :
— si N n'appartient pas à la suite des valeurs N_0 déterminé ci-dessus, il ne pourra pas s'établir une onde stationnaire stable présentant un nœud en A et un nœud en B, on observera des ondes « stationnaires » peu nettes et non stabilisées;
— si N devient égale à l'une des fréquences propres de la corde, c'est-à-dire si :

$$N \in \{N_1 = 45 \text{ Hz}; N_2 = 90 \text{ Hz}; N_3 = 135 \text{ Hz}; ...\}$$

il s'établit une onde stationnaire stable présentant un fuseau (fréquence N_1), deux fuseaux (fréquence N_2), ... de grande largeur aux ventres : on dit qu'il y a résonance. La corde apparaît alors comme un résonateur à fréquences multiples.



• Sur la figure ci-contre, sont représentés les aspects de la corde pour les fréquences N_1 et N_2 de la lame. Remarquons que pour N_1 la longueur d'onde $\lambda_1 = \dfrac{v}{N_1} = 2$ m; pour N_2, $\lambda_2 = \dfrac{v}{N_2} = 1$ m.

M 85 **Les résonateurs à fréquences multiples.**

Regroupons et généralisons les résultats dégagés dans les exercices précédents.

• **Un milieu de propagation limité par deux frontières,** distantes de ℓ, **est un oscillateur** présentant une série de fréquences propres N_0 formant une suite discontinue bien déterminée, on dit que ses fréquences propres sont quantifiées.

Chaque frontière impose une condition : soit un ventre, soit un nœud de la grandeur caractéristique choisie :

— *si la condition est la même aux deux frontières*, les fréquences propres N_0 correspondent à celles des ondes stationnaires qui peuvent s'établir, elles sont telles que :

$$\ell = n\frac{\lambda}{2} \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{v}{N_0} \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

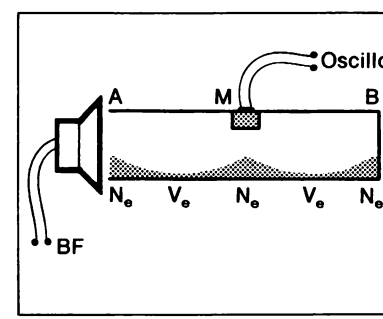
— *si les conditions aux frontières sont différentes*, les fréquences propres N_0 sont telles que :

$$\ell = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2} \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{v}{N_0} \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}.$$

• **Lorsque l'oscillateur oscille librement,** il est en général le siège de plusieurs ondes stationnaires qui se superposent : chaque point du milieu vibre de façon complexe (c'est-à-dire non sinusoïdale) à la fréquence fondamentale, c'est-à-dire à la fréquence la plus faible de la suite des fréquences propres N_0.

• **Lorsque l'oscillateur oscille en régime sinusoïdal forcé** imposé par un excitateur, il y a résonance lorsque la fréquence N des excitations est égale à l'une des valeurs de la suite des fréquences propres N_0. A la résonance, il s'établit une onde stationnaire sinusoïdale, de fréquence N, stable, de grande amplitude aux ventres. On dit alors que le milieu de propagation, limité par deux frontières est un résonateur à fréquences multiples.

E 65. *De la poudre de liège est au départ répartie uniformément le long d'un tube de verre horizontal* AB, *de longueur* $\ell = 0{,}6$ m, *fermé en* B.
Au milieu M *de* AB *est placé un petit microphone relié à un oscillographe utilisé avec son balayage interne.*
A l'extrémité A *du tube, un haut-parleur, dont la membrane est parallèle au fond du tube, est excité par un générateur électrique basse fréquence* (BF) *de fréquence* N *réglable.*



a) *Lorsque la fréquence du son sinusoïdal émis par le haut-parleur est* N = 560 Hz, *on constate qu'une onde stationnaire s'établit dans le tube présentant trois nœuds d'élongation longitudinales en* A, *en* M, *en* B *(la poudre de liège en ces points ne vibre pas) et deux ventres d'élongation longitudinale (la poudre de liège est expulsée de ces zones où l'air vibre fortement).*

α) *Quelle est la célérité du son dans l'air?*

β) *Que détecte le microphone* M?

b) *L'air entre le haut-parleur* A *et le fond du tube* B *constitue un résonateur pour les ondes élastiques longitudinales, quelles sont les fréquences propres de ce résonateur?*

c) *De combien faut-il au minimum augmenter la fréquence du haut-parleur, à partir de* 560 Hz, *pour que le microphone détecte un son d'intensité nulle?*

S 65. *a*) α) L'onde stationnaire qui s'établit a pour fréquence $N = 560$ Hz, pour longueur d'onde $\lambda = \frac{v}{N}$, v étant la célérité du son dans l'air. Elle présente un nœud d'élongation longitudinale en A et un nœud d'élongation longitudinale en B : par suite la longueur du tube $\ell = n\frac{\lambda}{2}$. Comme il n'y a qu'un seul nœud intermédiaire (en d'autres termes comme il n'y a que deux fuseaux d'élongation), $n = 2$.

Par suite $\ell = \lambda = \frac{v}{N}$, soit $v = \ell N = 0{,}6 \times 560 = 336\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

β) • Une onde stationnaire élastique longitudinale, se propageant dans un fluide, peut être caractérisée par deux grandeurs : la pression différentielle $p - p_0$ ou bien l'élongation longitudinale y.
Les nœuds d'élongation sont des ventres de pression, les ventres d'élongation sont des nœuds de pression.
Le microphone, sensible aux variations de pression, détecte un son maximum lorsqu'il est placé en un ventre de pression, un son nul lorsqu'il est placé en un nœud de pression.

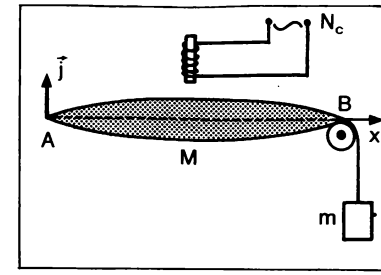
• Pour $N = 560$ Hz, il s'établit un nœud d'élongation en M, donc un ventre de pression : le microphone détecte un son d'intensité maximale (la sinusoïde dessinée sur l'écran de l'oscillographe a une amplitude maximale).

b) Les fréquences propres de la colonne d'air, limitée en A et en B, sont les fréquences des ondes stationnaires pouvant s'établir dans cette colonne. Comme il y a deux nœuds d'élongation en A et en B, $\ell = n\frac{\lambda}{2}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Par suite $\ell = n\frac{v}{2N_0}$ et $N_0 = n\frac{v}{2\ell} = n \times 280$ Hz.
Les fréquences propres quantifiées, N_0, ne peuvent donc être que : 280 Hz; 560 Hz; 840 Hz... $n \times 280$ Hz, ...

c) • Prenons l'élongation longitudinale pour caractériser l'onde stationnaire. Pour la fréquence fondamentale 280 Hz, la colonne d'air vibre en un fuseau d'élongation; pour la deuxième fréquence propre 560 Hz, elle vibre en deux fuseaux d'élongation; pour la troisième fréquence propre 840 Hz, elle vibre en trois fuseaux d'élongation, ... Lorsque le nombre de fuseaux d'élongation est impair, il s'établit un ventre d'élongation en M, donc un nœud de pression : le microphone détecte alors un son nul.

• Par suite, partant de la fréquence 560 Hz, il faut atteindre 840 Hz pour obtenir à nouveau la résonance avec trois fuseaux d'élongation et un son nul en M. Il faut donc augmenter la fréquence du haut-parleur de $840 - 560 = 280$ Hz.

E 66. a) *Un fil de fer, de masse linéique* $\mu = 10^{-3}\ kg \cdot m^{-1}$, *est fixé en* A. *Il passe sur une poulie* B. *Une masse* m *est accrochée à son autre extrémité. La distance* $AB = \ell =$ 1,2 m.
Ce fil subit l'action d'un électro-aimant alimenté par un courant alternatif de fréquence $N_c = 50$ Hz, *placés à égales distances de* A *et* B.
Le fil vibre en un seul fuseau, de largeur au ventre 14 mm.



α) *A quelle fréquence le fil vibre-t-il?*

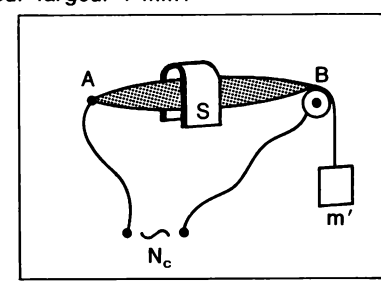
β) *Quelle est la masse* m *accrochée?* $g = 9{,}8\ m \cdot s^{-2}$.
On rappelle que la célérité des ondes transversales le long d'une corde tendue par la force F, *de masse linéique* μ, *est* $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$.

γ) *Quelle est la vitesse maximale d'agitation du milieu* M *du fil?*

δ) *Déterminer l'amplitude* $\mathcal{A}(x)$ *de l'onde stationnaire qui s'établit, la grandeur caractéristique est l'élongation transversale* y *mesurée algébriquement à l'aide du vecteur transversal* $\vec{j}$, *l'axe des abscisses* Ax *a pour origine* A.

ε) *A quelles distances de* A, *le fuseau a-t-il pour largeur* 7 mm?

b) *On remplace le fil de fer par un fil de cuivre de même masse linéique* μ, *tendu par la masse* m', *la distance* AB *est toujours* $\ell = 1{,}2$ m.
Le fil de cuivre est parcouru par un courant alternatif sinusoïdal de fréquence $N_c =$ 50 Hz. *On place un aimant en* U *autour du fil, de façon à créer un champ magnétique* $\vec{B}$ *horizontal dans une zone équidistante de* A *et* B.

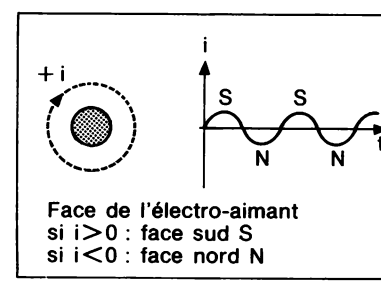


α) *A quelle fréquence le fil vibre-t-il?*

β) *Le fil vibre en un fuseau, quelle est la masse* m'?

γ) *Que faut-il modifier pour que le fil vibre en deux fuseaux* (N_c *reste égal à* 50 Hz, ℓ *reste égal à* 1,2 m)?

S 66. *a*) *α*) • Le fil de fer est attiré aussi bien par la face Nord de l'électro-aimant que par la face Sud.
• En une période du courant, une face devient une fois Nord, une fois Sud : le fil est donc attiré deux fois par période du courant. Il subit donc des oscillations forcées de fréquence $N = 2N_c = 100$ Hz.



Face de l'électro-aimant
si $i > 0$: face sud S
si $i < 0$: face nord N

β) • La tension de la corde F est égale au poids de la masse m : $F = mg$. La célérité des ondes transversales est donc $v = \sqrt{\frac{mg}{\mu}}$.

• La corde vibrant en un seul fuseau : $\ell = \frac{\lambda}{2} = \frac{v}{2N} = \frac{1}{2N}\sqrt{\frac{mg}{\mu}}$.

• Par suite $m = \frac{4N^2\ell^2\mu}{g} = 5{,}88$ kg.

γ) • Tous les points du fil, en particulier le point M, ont des mouvements rectilignes sinusoïdaux de fréquence $N = 100$ Hz, c'est-à-dire de pulsation $\omega = 2\pi N = 200\pi$ rad·s^{-1}.

• Le point M, décrivant un segment de longueur 14 mm, a un mouvement d'amplitude 7 mm, de loi horaire $y = 7 \cdot 10^{-3} \cos(200\pi t + \varphi)$ en unités S.I.

• La vitesse algébrique de M est $\bar{v} = \dot{y} = -7 \cdot 10^{-3} \times 200\pi \sin(200\pi t + \varphi)$: la vitesse maximale de M est donc $v_{maxi} = 7 \cdot 10^{-3} \times 200\pi = 4{,}4$ m·s^{-1}.

δ) • La fonction de l'onde stationnaire (revoir $\mathcal{M}$ 83) est de la forme :

$$y(x; t) = A \cos(kx + \alpha) \cdot \cos(\omega t + \varphi),$$

son amplitude est la fonction de x : $\mathcal{A}(x) = A|\cos(kx + \alpha)|$.

• A désigne l'amplitude maximale de l'onde, donc l'amplitude au ventre : $A = 7 \cdot 10^{-3}$ m. $\quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{2\ell} = \frac{\pi}{\ell}$ rad·m^{-1}.

• Pour déterminer α, écrivons que pour $x = 0$, $\mathcal{A}(x) = 0$ puisque A est un nœud d'élongation transversale, il s'ensuit : $\cos\alpha = 0$, on peut prendre $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

• En résumé l'amplitude de l'onde est :

$$\mathcal{A}(x) = 7 \cdot 10^{-3} \left|\cos\left(\frac{\pi x}{\ell} + \frac{\pi}{2}\right)\right| = 7 \cdot 10^{-3} \left|\sin\frac{\pi x}{\ell}\right|.$$

ε) • Le fuseau a pour largeur 7 mm aux points d'abscisse x telles que $\mathcal{A}(x) = 3{,}5 \cdot 10^{-3}$ m.

Par suite $7 \cdot 10^{-3} \left|\sin\frac{\pi x}{\ell}\right| = 3{,}5 \cdot 10^{-3}$ soit $\sin\frac{\pi x}{\ell} = \mp 0{,}5 = \pm\sin\frac{\pi}{6}$ (1).

Cette équation (1) admet 4 séries de solutions ($n \in \mathbb{Z}$) :

$\frac{\pi x}{\ell} = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ soit $x = \frac{\ell}{6} + 2n\ell$;

$\frac{\pi x}{\ell} = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2n\pi$ soit $x = \frac{5\ell}{6} + 2n\ell$;

$\frac{\pi x}{\ell} = \frac{-\pi}{6} + 2n\pi$ soit $x = -\frac{\ell}{6} + 2n\ell$;

$\frac{\pi x}{\ell} = \left[\pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] + 2n\pi$ soit $x = \frac{7\ell}{6} + 2n\ell$.

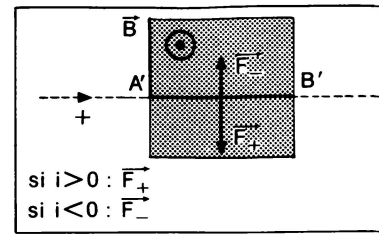
Classons les solutions correspondant à $x \geqslant 0$, par ordre croissant : $\frac{\ell}{6}$; $\frac{5\ell}{6}$; $\frac{7\ell}{6}$; $\frac{11\ell}{6}$; $\frac{13\ell}{6}$ ... Comme $x \leqslant \ell$, il n'y a que deux solutions à retenir : $x = \frac{\ell}{6}$ et $x = \frac{5\ell}{6}$.

b) α) Soit A'B' la portion de fil de cuivre baignée par le champ magnétique. Il prend naissance sur A'B' une force de Laplace $\vec{F} = |i|\vec{\ell}' \wedge \vec{B}$, $\vec{\ell}' = \overrightarrow{A'B'}$ si $i > 0$ ou $\vec{\ell}' = \overrightarrow{B'A'}$ si $i < 0$.

— Cette force $\vec{F} \perp \vec{B}$ et $\perp \vec{\ell}'$ est verticale.

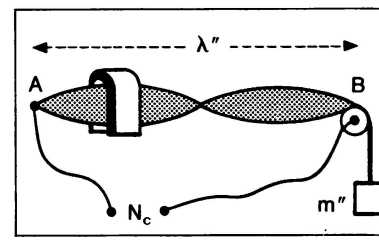
— Elle change de sens lorsque i change de signe.

— Le module de $F = |i|\ell' B$: il est proportionnel à la valeur absolue de i.



En résumé $\vec{F}$ agite le fil à la même fréquence $N_c = 50$ Hz que celle du courant i.

β) Réponse : $m' = \dfrac{m}{4} = 1{,}47$ kg.



γ) • D'une part il faut modifier la tension de la corde, c'est-à-dire qu'il faut accrocher une masse différente m''.

Comme $\ell = 2\dfrac{\lambda''}{2} = \lambda'' = \dfrac{v''}{N_c} = \dfrac{1}{N_c}\sqrt{\dfrac{m''g}{\mu}}$, il s'ensuit $m'' = \dfrac{N_c^2 \ell^2 \mu}{g} = \dfrac{m}{16} = 0{,}367$ kg.

• D'autre part, comme c'est la force de Laplace qui agite le fil, l'aimant doit être placé à un ventre d'élongation, c'est-à-dire à $\dfrac{\ell}{4}$ ou bien à $\dfrac{3\ell}{4}$ de A.

E 67. *Parmi les affirmations suivantes, certaines sont exactes, d'autre sont fausses. Justifiez vos réponses, sans calcul, mais de façon probante.*

① *La période spatiale d'une corde, siège d'une onde stationnaire, est la longueur d'un fuseau.*

② *Aux ventres de pression, d'une onde sonore stationnaire, l'air est toujours comprimé au maximum.*

③ *Tous les points d'une onde progressive, ou bien d'une onde stationnaire, vibrent à la même fréquence.*

④ *Tous les ventres, de même nature, d'une onde stationnaire vibrent en phase.*

⑤ *Le déphasage entre deux points d'une onde stationnaire est 0 ou π (module 2π).*

⑥ *Une corde, siège d'une onde stationnaire, redevient périodiquement rectiligne.*

⑦ *Avec une caméra on prend des photos instantanées d'une corde siège d'une onde. En comparant deux photos consécutives, on peut savoir si l'onde est progressive ou stationnaire.*

⑧ *Quand il y a un changement de signe (ou bien un déphasage de π) sur un obstacle entre la grandeur caractéristique d'une onde progressive incidente et la même grandeur de l'onde progressive réfléchie sur l'obstacle, il s'établit un nœud de cette grandeur sur l'obstacle.*

⑨ *Deux ondes progressives de même nature, de même fréquence, d'amplitudes très différentes* a_1 *et* a_2, *se propagent dans la même direction, en sens opposé. Dans la zone où elles se superposent, on observe une onde stationnaire peu nette.*

⑩ *Un milieu propagateur, limité par une frontière réfléchissant les ondes, est un oscillateur à plusieurs fréquences propres.*

S 67. (A vous de voir si vous obtenez 10 sur 10!)

① Apparemment, en éclairage continu, les fuseaux semblent identiques. Cependant, en éclairage stroboscopique, on constate que les points d'un fuseau vibrent en opposition de phase avec ceux d'un fuseau immédiatement voisin. La période spatiale correspond à la longueur de deux fuseaux, c'est-à-dire à $2 \times \frac{\lambda}{2} = \lambda$: on retrouve que c'est la longueur d'onde. L'affirmation est donc fausse.

② Dire qu'un point est un ventre de pression ne signifie pas que la variation de pression Δp, reste constante et égale à sa valeur maximale A. Au contraire, c'est aux ventres, que Δp varie le plus entre $+A$ (compression maximale) et $-A$ (dilatation maximale) selon la loi $\Delta p = A \cos(\omega t + \varphi)$ si l'onde stationnaire est sinusoïdale. L'affirmation est donc fausse.

③ Oui, c'est une propriété commune aux ondes progressives ou stationnaires : tous les points vibrent à la même période temporelle T, donc à la même fréquence $N = \frac{1}{T}$.

④ Non : tous les ventres ont la même amplitude maximale, mais ils vibrent en opposition de phase s'ils sont distants de $(2n+1)\frac{\lambda}{2}$ avec $n \in \mathbb{N}$. Ils ne vibrent en phase que s'ils sont distants de $n\lambda$.

⑤ La fonction d'onde stationnaire est de la forme $u(x; t) = A \cos(kx + \alpha) \cdot \cos(\omega t + \varphi)$. La phase temporelle $(\omega t + \varphi)$ est indépendante de x : deux points vibrent en phase (déphasage 0, modulo 2π) si leurs $\cos(kx + \alpha)$ ont le même signe; ils vibrent en opposition de phase (déphasage π, modulo 2π) si leurs $\cos(kx + \alpha)$ ont des signes opposés. L'affirmation est donc exacte.

⑥ Oui, en effet à un instant donné la corde, siège d'une onde stationnaire sinusoïdale, a la forme d'une sinusoïde qui s'aplatit puis se gonfle alternativement sur place : la corde passe deux fois par période par sa position de repos où elle est alors rectiligne.

⑦ Oui :
— si l'onde est progressive sinusoïdale, sur deux photos consécutives, on observera deux sinusoïdes de même forme mais décalées suivant l'axe de la sinusoïde (en d'autres termes, entre les deux photos la sinusoïde s'est translatée sans se déformer le long de la corde);
— si l'onde est stationnaire sinusoïdale, sur deux photos consécutives, on observera deux sinusoïdes dont les points d'élongation nulle sont aux mêmes endroits (les nœuds d'élongation) et dont les amplitudes sont différentes (en d'autres termes, entre les deux photos la sinusoïde s'est aplatie ou gonflée en semblant rester liée aux nœuds).

⑧ Soit $u_i(x; t)$ la grandeur caractéristique de l'onde incidente, $u_r(x; t)$ celle de l'onde réfléchie sur l'obstacle d'abscisse x_0.
A chaque instant $u_r(x_0; t) = -u_i(x_0; t)$
par suite à chaque instant $u(x_0; t) = u_i(x_0; t) + u_r(x_0; t) = 0$: il s'établit bien un nœud de la grandeur caractéristique sur l'obstacle.

⑨ Les conditions pour qu'il y ait une onde stationnaire sont satisfaites : c'est bien la superposition de deux ondes de même nature, de même fréquence, cheminant suivant la même direction, en sens contraire.
Lorsque les deux ondes ont la même amplitude a, l'amplitude des ventres est 2a, celle des nœuds est nulle : l'onde stationnaire a une amplitude qui varie très nettement entre 2a et 0 en fonction de x, abscisse du point considéré.
Lorsque les deux ondes ont des amplitudes a_1 et a_2, l'amplitude des ventres est $a_1 + a_2$, celle des nœuds est $|a_1 - a_2|$. Si a_2 est par exemple très inférieur à a_1, il y a peu de différence entre les amplitudes des nœuds et des ventres : conformément à l'affirmation, l'onde stationnaire est alors peu nette.

⑩ Pour qu'un milieu propagateur soit un oscillateur (s'il oscille librement) ou un résonateur (s'il oscille de façon forcée), il faut qu'il soit limité par deux frontières réfléchissant les ondes.
La quantification des fréquences propres provient du fait qu'il faut traduire que l'onde stationnaire, « coincée » entre ses deux frontières, doit respecter les conditions imposées par ces frontières.
L'affirmation est donc fausse puisque le milieu propagateur proposé ne comporte qu'une frontière (c'est-à-dire qu'il est de dimensions infinies du côté opposé à la frontière).

Quand on demande le déphasage entre deux points, que faut-il comprendre?

Tacitement il s'agit du déphasage temporel au même instant.

Est-ce que la pulsation temporelle ω et la pulsation spatiale (ou norme du vecteur d'onde) k jouent des rôles symétriques?

• Voyons les ressemblances :

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad T \text{ période temporelle}, \quad \omega \text{ en rad} \cdot s^{-1};$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \lambda \text{ période spatiale}, \quad k \text{ en rad} \cdot m^{-1}.$$

• Cependant, attention dans la fonction d'onde sinusoïdale progressive :

$$u(x; t) = A \cos(\omega t - \bar{k}x + \varphi)$$

c'est ω et $(-\bar{k})$ qui jouent des rôles symétriques.

Dans les calculs des phases, vous n'effectuez pas les multiplications par π (vous gardez $14{,}3\pi$ et n'écrivez pas 44,9, par exemple), pourquoi?

Le résultat est souvent plus simple à exploiter en gardant le facteur multiplicatif π, en particulier pour corriger la phase en ajoutant ou retranchant un certain nombre de fois 2π.
Ainsi, avec votre exemple, $\cos 14{,}3\pi = \cos(14{,}3\pi - 14\pi) = \cos 0{,}3\pi$ est plus facile à exploiter que $\cos(44{,}9 \text{ rad})$.

Avez-vous un moyen simple pour déterminer la période d'une fonction sinusoïdale?

Soit la fonction sinusoïdale de la variable z, $\cos(1\,019\,z + \varphi)$. Pour obtenir la période Z de z, il suffit de mettre la fonction sous la forme $\cos\left(\frac{2\pi z}{Z} + \varphi\right)$: on trouve alors $1\,019 = \frac{2\pi}{Z}$, d'où $Z = \frac{2\pi}{1\,019} = 6{,}16 \cdot 10^{-3}$.

Dans vos exercices vous n'utilisez que les formules $\cos p + \cos q$ *et* $\sin p + \sin q$, *faut-il apprendre les formules* $\cos p - \cos q$ *et* $\sin p - \sin q$?

• En physique au lieu d'écrire $S = a \sin p - a \sin q$, on écrit souvent : $S = a \sin p + a \sin(q + \pi)$, on remplace le signe $-$ par un déphasage supplémentaire de π rad.
De cette façon la somme S peut être exploitée :
— soit en utilisant la relation $a[\sin p + \sin(q + \pi)]$;
— soit à l'aide des vecteurs de Fresnel : on construit $\vec{V_1}$ représentant a sin p, $\vec{V_2}$ représentant a $\sin(q + \pi)$ et $\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$ qui représente S.
La même astuce peut être utilisée, bien sûr pour $S = a \cos p - a \cos q$ qui peut s'écrire $S = a[\cos p + \cos(q + \pi)]$.

• Remarquons que si nous avions à déterminer les caractéristiques de $S = a \cos p + b \cos q$ la seule méthode simple est de construire les vecteurs de Fresnel.

• *Comment reconnaître sans erreur l'amplitude $\mathcal{A}(x)$ d'une onde stationnaire?*

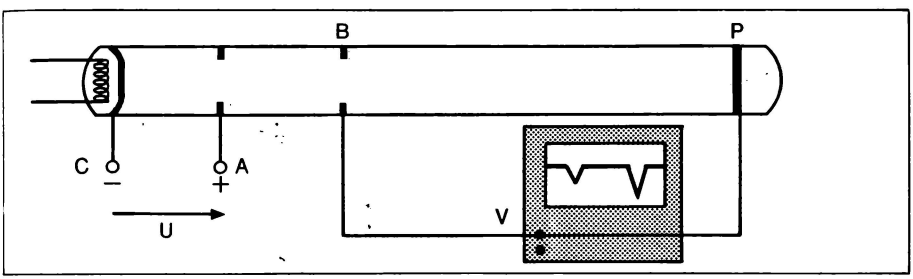
Soit la fonction d'onde stationnaire sinusoïdale $u(x; t) = 4 \sin \left(160\,t + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin \left(10\,x + \frac{\pi}{6}\right)$.

L'amplitude $\mathcal{A}(x)$ est la valeur absolue du terme multiplicatif indépendant du temps, dans notre exemple : $\mathcal{A}(x) = 4 \left|\sin \left(10\,x + \frac{\pi}{6}\right)\right|$.

6 LES PARTICULES DE GRANDE ÉNERGIE

E 68. *(Expérience de Bertozzi.)*
Un canon à électrons envoie un paquet d'électrons, partant à vitesse négligeable de C, *accélérés par la tension* $U_{AC} = U$. *Dans le tube règne un vide poussé. En passant à travers l'anneau* B, *une partie des électrons est captée : une impulsion électrique parcourt le fil* BV, *un pic apparaît sur l'écran de l'oscillographe. En arrivant sur la plaque* P, *le reste du paquet produit une seconde impulsion : un second pic apparaît sur l'écran.*

a) *Que peut-on dire du mouvement des électrons entre* B *et* P?



b) *Indiquer comment on peut mesurer le « temps de vol » des électrons entre* B *et* P.

c) *La distance* $BP = d = 8{,}4$ m. *Pour diverses tensions accélératrices, on relève les « temps de vol »* t *entre* B *et* P.

U *en* kV	0,5	50	200	500	1 000	4 500
t *en* ns	633	68	40,4	32,3	30,8	28,4

α) *Montrer que si l'électron obéissait aux lois de la mécanique newtonienne, la vitesse* v, *acquise en* A, *serait proportionnelle à* $\sqrt{U}$. *Déterminer le coefficient de proportionnalité* K *en unités* S.I. *On donne pour l'électron :* $\frac{e}{m} = 1{,}78 \cdot 10^{11}\ C \cdot kg^{-1}$.

β) *A partir des données du tableau, tracer la courbe* $\mathcal{C}$ *représentant* v *en fonction de* $\sqrt{U}$. *Que peut-on en déduire?*

γ) *Déterminer graphiquement le coefficient directeur de la tangente à* $\mathcal{C}$ *à l'origine. Le comparer à* K. *Conclure.*

δ) *En utilisant les lois de la mécanique relativiste, retrouver la vitesse de l'électron accéléré par* $U = 500$ kV.
La masse d'un électron est 0,5 MeV/c^2.

86 Les lois de la mécanique relativiste.

Nous nous limiterons aux repères galiléens (on parle alors de relativité restreinte).

a) Les expressions nouvelles.

• En désignant par c la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide ($3 \cdot 10^8$ m·s^{-1}), il est commode d'utiliser les coefficients positifs, sans dimension :

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

• **La quantité de mouvement** d'une particule de masse m lancée à vitesse v :

$$\vec{p} = \gamma\, m \vec{v}$$

(Le coefficient γ dépend de v; la masse m est constante quel que soit v.)

• Une particule de masse m, au repos, est équivalente à une énergie dite *énergie de repos* ou *énergie de masse :*

$$E_0 = mc^2.$$

(Nous y reviendrons dans ℳ 99.)

• *L'énergie totale* d'une particule lancée à vitesse v :

$$E = \gamma\, mc^2.$$

• *L'énergie cinétique* d'une particule lancée à vitesse v :

$$E_c = E - E_0 = (\gamma - 1)\, mc^2.$$

b) Les lois ayant la même expression qu'en mécanique newtonienne.

• Soit une particule de masse m soumise à la force $\vec{F}$:

— à chaque instant, d'après la relation fondamentale de la dynamique :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

— entre deux instants, d'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$W_{\vec{F}} = E_{c_2} - E_{c_1}.$$

• Le travail de la force électrique $\vec{F}_e$ s'exerçant sur une particule chargée passant de A à B est :

$$W_{\vec{F}_e} = q(V_A - V_B).$$

• Le rayon de la trajectoire circulaire d'une particule chargée lancée perpendiculairement à un champ magnétique uniforme $\vec{B}$:

$$R = \frac{p}{|q|B}. \qquad (1)$$

***c)* Importance de la quantité de mouvement.**

• La vitesse v d'une particule est toujours inférieure à c (égale à c si la particule a une masse nulle). Au contraire la quantité de mouvement p d'une particule peut augmenter indéfiniment : pour décrire l'accélération des particules relativistes la quantité de mouvement est mieux adaptée que la vitesse. Remarquons que pour une particule chargée, p peut être déterminé à l'aide de la formule (1) ci-dessus.

• Il est donc intéressant d'exprimer certaines formules en fonction de p, on trouve :

$$\beta = \frac{pc}{E}$$

$$E = \sqrt{(pc)^2 + E_0^2} = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}.$$

***d)* Des unités commodes.**

• On peut bien sûr utiliser les unités du système international. On utilise souvent comme unités d'énergie le MeV, le GeV (revoir $\mathcal{M}$ 25 et $\mathcal{M}$ 26).

• On peut remarquer que (pc) et (mc^2) sont des énergies, il est pratique :

— de mesurer (pc) en MeV, donc p en MeV/c;

— de mesurer (mc^2) en MeV, donc m en MeV/c^2.

S 68. *a*) Entre B et P le champ électrique est nul, le vide est suffisamment poussé pour qu'il n'y ait pas de choc électron-molécule de gaz. Les électrons soumis uniquement à leur poids sont en chute libre. Cependant la vitesse des électrons étant très grande, l'effet de leur poids est négligeable : les électrons ont donc un mouvement rectiligne et uniforme par rapport au tube (donc par rapport à la Terre).

b) • On s'arrange d'abord pour que les fils BV et PV aient même longueur, de cette façon on n'a pas à tenir compte des durées de parcours des impulsions électriques dans ces fils.

• On mesure la distance horizontale séparant les deux pics sur l'écran de l'oscillographe. Connaissant la constante de balayage, on en déduit le temps t séparant les tracés des deux pics, donc le « temps de vol » t des électrons entre B et P.

c) α) • Le système est un électron passant de C à A. Cet électron est soumis à la force électrique $\vec{F}$ et à son poids que l'on néglige devant $\vec{F}$.

D'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$E_{c_A} - E_{c_C} = W_{\vec{F}} = -e(V_C - V_A) = e(V_A - V_C) = eU.$$

• Dans le domaine de la mécanique newtonienne $E_{c_A} = \frac{1}{2} m v_A^2$. En négligeant E_{c_C}, on aboutit à $\frac{1}{2} m v_A^2 = eU$ d'où :

$$v_A = \sqrt{\frac{2e}{m}} \cdot \sqrt{U} = K\sqrt{U}.$$

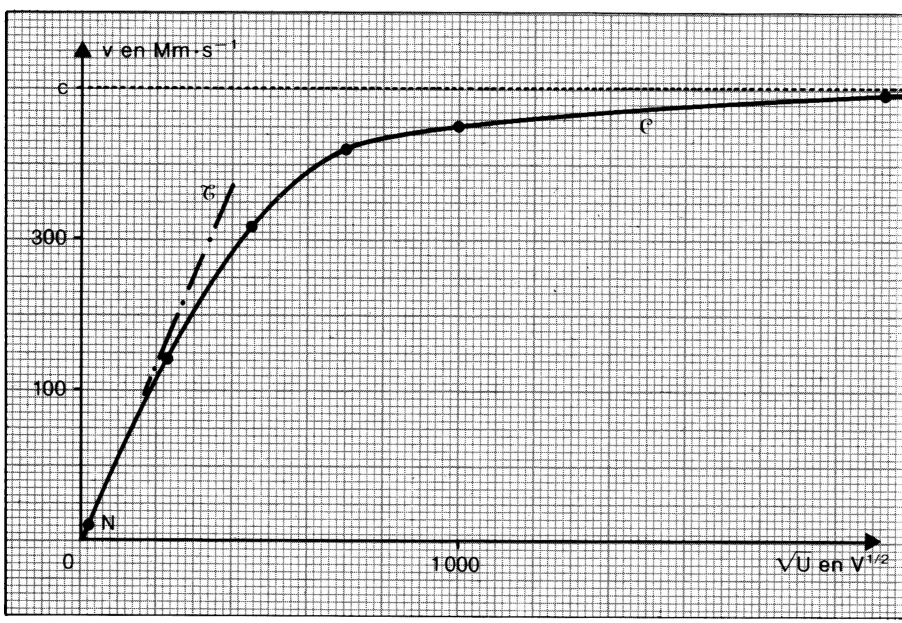
En unités internationales, le coefficient de proportionnalité $K = \sqrt{\frac{2e}{m}} = 5{,}97 \cdot 10^5$.

β) • A partir du « temps de vol » t, on en déduit la vitesse acquise par les électrons : $v = \frac{d}{t}$, puisque le mouvement entre B et P est rectiligne uniforme.

• On trouvera successivement les valeurs $v = \frac{8{,}4}{633 \cdot 10^{-9}} = 1{,}33 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $1{,}23 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $2{,}08 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $2{,}60 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $2{,}73 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $2{,}96 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

• On peut ainsi construire point par point la courbe déterminée par les couples suivants :

$\sqrt{U}$ en $V^{1/2}$	22	224	447	707	1 000	2 120
v en $Mm \cdot s^{-1}$	13,3	123	208	260	273	296



• On constate que : v n'est pas proportionnel à $\sqrt{U}$ (sauf au tout début de la courbe $\mathcal{C}$ qui est pratiquement rectiligne);
v ne peut dépasser la célérité c des ondes électromagnétiques dans le vide.

γ) Le début de la courbe $\mathcal{C}$ étant pratiquement rectiligne, la tangente $\mathcal{T}$ en O à $\mathcal{C}$ passe par O et pratiquement par le point N de coordonnées ($22\ V^{1/2}$; $13{,}3 \cdot 10^6\ m \cdot s^{-1}$). Par suite le coefficient directeur de $\mathcal{T}$ est $K' = \frac{13{,}3 \cdot 10^6 - 0}{22 - 0} \simeq 6 \cdot 10^5$ en unités S.I.
Aux erreurs de mesures près $K' = K$.
Par suite dans la région où $\mathcal{C}$ se confond avec $\mathcal{T}$: $v = K\sqrt{U}$. Dans ce domaine les lois de la mécanique newtonienne restent valables, on dit que l'électron n'est pas relativiste.

δ) • Le système est l'électron passant de C à A. Cet électron est soumis à la force électrique $\vec{F}$ et à son poids que l'on néglige devant $\vec{F}$. D'après le théorème de l'énergie cinétique $E_{c_A} - E_{c_C} = W_{\vec{F}} = eU$, soit comme E_{c_C} est négligeable :

$$E_{c_A} = eU = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \times 500 \cdot 10^3\ J = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \times 500 \cdot 10^3}{10^6 \times 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 0{,}5\ MeV.$$

(Remarquons que jusqu'à ce stade le raisonnement est le même qu'en mécanique newtonienne.)

• *Première méthode pour calculer* v : on calcule γ, puis β.
— L'énergie cinétique de l'électron relativiste est $E_{c_A} = (\gamma - 1)mc^2$.
D'où $\gamma - 1 = \frac{E_{c_A}}{mc^2} = \frac{0{,}5}{0{,}5} = 1$ (remarquons que pour l'électron $m = 0{,}5\ MeV/c^2$ donc $mc^2 = 0{,}5\ MeV$). Par suite $\gamma = 2$.
— Comme $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ il s'ensuit $\sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{\gamma} = 0{,}5$, d'où $\beta = 0{,}866$.
Comme $\beta = \frac{v}{c}$, $v = \beta c = 0{,}866 \times 3 \cdot 10^8 = 2{,}60 \cdot 10^8\ m \cdot s^{-1}$.

• *Deuxième méthode pour calculer* v : on calcule E, pc, puis β.
— L'énergie totale de l'électron est $E = E_0 + E_c$.
— Comme $E = \sqrt{(pc)^2 + E_0^2}$ il s'ensuit $E_0 + E_c = \sqrt{(pc)^2 + E_0^2}$.
Élevons au carré $E_0^2 + E_c^2 + 2E_0E_c = (pc)^2 + E_0^2$ soit :

$$pc = \sqrt{E_c^2 + 2E_0E_c}.$$

— Application numérique : $pc = \sqrt{0{,}5^2 + 2 \times 0{,}5 \times 0{,}5} = 0{,}866\ MeV$.
— Comme $\beta = \frac{pc}{E} = \frac{0{,}866}{0{,}5 + 0{,}5} = 0{,}866$, on en déduit $v = \beta c = 2{,}60 \cdot 10^8\ m \cdot s^{-1}$.

Note : cette deuxième méthode est très intéressante pour calculer p à partir de E_c et E_0.

E 69. a) *Une particule est lancée à la vitesse* v *telle que* β *soit inférieur à* 0,1.

α) *Montrer que les expressions de l'énergie cinétique de cette particule en mécanique newtonienne et en mécanique relativiste sont pratiquement équivalentes.*

β) *Que peut-on dire alors du rapport* $\frac{E_c}{E_0}$?

b) *Un proton a pour énergie cinétique* $E_c = 1000$ MeV, *son énergie au repos est* $E_0 = 938$ MeV.

α) *Ce proton est-il relativiste?*

β) *Calculer sa quantité de mouvement en* MeV/c *et en* $kg \cdot m \cdot s^{-1}$.

γ) *Calculer sa vitesse.*

δ) *Ce proton entre perpendiculairement à un champ magnétique uniforme* $\vec{B}$ *de module* $B = 1{,}3$ T, *quelles sont les caractéristiques de sa trajectoire?*

S 69. *a)* α) • En mécanique newtonienne : $E_c(\text{newt}) = \frac{1}{2} mv^2$.

En mécanique relativiste : $E_c = (\gamma - 1)mc^2$ avec $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = (1-\beta^2)^{-1/2}$ et $\beta = \frac{v}{c}$.

• Si $\beta < 0{,}1$, $\beta^2 < 0{,}01$: β^2 est très inférieur à 1. On peut donc utiliser la formule d'approximation $(1+\varepsilon)^n \simeq 1 + n\varepsilon$.

Par suite $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} \simeq 1 + \frac{\beta^2}{2}$ et $\gamma - 1 \simeq \frac{\beta^2}{2}$.

Alors $E_c(\text{relat}) \simeq \frac{\beta^2}{2} mc^2 \simeq \frac{v^2}{2c^2} \times mc^2 = \frac{1}{2} mv^2 = E_c(\text{newt})$.

β) Si $\beta < 0{,}1$, $E_c \simeq \frac{1}{2} mv^2$, le rapport $\frac{E_c}{E_0} \simeq \frac{\frac{1}{2} mv^2}{mc^2} \simeq \frac{1}{2}\beta^2 < \frac{1}{200}$.

Le rapport est donc très inférieur à 1.

87 Particules non relativistes.

Mémorisons le résultat qui vient d'être dégagé.

• Une particule est non relativiste si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

$$\beta = \frac{v}{c} < 0{,}1 \qquad (1)$$

$$\frac{E_c}{E_0} < 0{,}01 \qquad (2)$$

• D'après (2) : $E = E_0 + E_c \simeq E_0$. Comme $\beta = \frac{pc}{E}$, alors $\beta \simeq \frac{pc}{E_0}$.

Par suite, d'après (1), nous découvrons une autre condition équivalente :

$$\frac{pc}{E_0} < 0{,}1 \qquad (3)$$

S 69. *b)* α) • Évaluons le rapport $\frac{E_c}{E_0}$: si $\frac{E_c}{E_0} < 0{,}01$ le proton n'est pas relativiste. Numériquement $\frac{E_c}{E_0} = \frac{1000}{938}$: ce rapport voisin de 1 nous permet d'affirmer que le proton est relativiste.

β) • (Utilisons la deuxième méthode de calcul proposée dans l'exercice précédent.)

$$E = E_c + E_0 = \sqrt{(pc)^2 + E_0^2}.$$

D'où $$E_c^2 + E_0^2 + 2E_0E_c = (pc)^2 + E_0^2.$$

Soit $(pc)^2 = E_c^2 + 2E_0E_c$ et $pc = \sqrt{E_c^2 + 2E_0E_c}$.

• Application numérique.

— Utilisons le MeV comme unité d'énergie :

$$pc = \sqrt{1000^2 + 2 \times 938 \times 1000} = 1696 \text{ MeV d'où } p = 1696 \text{ MeV/c}.$$

— Convertissons p en unités S.I. :

$$p = 1696 \frac{\text{MeV}}{c} = \frac{1696 \times 10^6 \times 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{3 \cdot 10^8} = 9{,}05 \cdot 10^{-19} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

γ) • $\beta = \frac{v}{c} = \frac{pc}{E} = \frac{1696}{1000 + 938} = 0{,}875$, d'où $v = \beta c = 2{,}625 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

• On aurait pu utiliser la première méthode de calcul proposée dans l'exercice précédent :

$$\gamma - 1 = \frac{E_c}{E_0} = 1{,}066; \quad \gamma = 2{,}066; \quad \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{1}{\gamma} = 0{,}484;$$

$$\beta = 0{,}875; \quad v = 2{,}625 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

δ) Le proton, lancé avec le vecteur vitesse initial $\vec{v_0} \perp \vec{B}$ dans le champ magnétique uniforme, décrit un cercle à vitesse constante. Le plan du cercle est perpendiculaire à $\vec{B}$. Son rayon $R = \frac{p}{|q|B}$.

Nous avons évalué ci-dessus la quantité de mouvement du proton relativiste : $p = 9{,}05 \cdot 10^{-19} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, par suite $R = \frac{9{,}05 \cdot 10^{-19}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \times 1{,}3} = 4{,}35 \text{ m}$.

E 70. *Des deutons ont une quantité de mouvement* $\vec{p}$, *par rapport à la Terre, de module* $p = 2{,}34$ GeV/c.
La masse d'un deuton est $m = 1876$ MeV/c^2.

a) *Quelle est la masse d'un deuton en* kg?

b) *Le deuton est-il relativiste?*

c) *Quelle est son énergie totale?*

d) *Quelle est son énergie cinétique?*

e) *Quelle est sa vitesse?*

S 70. *a*) $m = 1876 \dfrac{MeV}{c^2} = \dfrac{1876 \times 10^6 \times 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{(3 \cdot 10^8)^2} = 3{,}33 \cdot 10^{-27}$ kg.

b) L'énergie de repos (ou énergie de masse) du deuton est $E_0 = mc^2 \approx$ 1,876 GeV. Le rapport $\dfrac{pc}{E_0} = \dfrac{2{,}34}{1{,}876} = 1{,}25$: il est supérieur à 0,1, le deuton est relativiste.

c) L'énergie totale d'un deuton est $E = \sqrt{(pc)^2 + E_0^2} = \sqrt{2{,}34^2 + 1{,}876^2} = 3$ GeV.

d) $E = E_c + E_0$, d'où $E_c = E - E_0 = 3 - 1{,}876 = 1{,}124$ GeV.

e) $\beta = \dfrac{pc}{E} = \dfrac{2{,}34}{3} = 0{,}78$ d'où $v = \beta c = 0{,}78 \times 3 \cdot 10^8 = 2{,}34 \cdot 10^8$ m·s^{-1}.

E 71. *Un électron a une vitesse* $v = 0{,}95$ c. *Sa masse* $m = 0{,}51$ MeV/c^2.

a) *Quelle est son énergie cinétique* E_c?

b) *Quelle est son énergie totale* E?

c) *Quelle est sa quantité de mouvement* p?

d) *On l'accélère, sa quantité de mouvement* p' *devient égale à* 2p. *Calculer les rapports* $\dfrac{E'}{E}$, $\dfrac{E'_c}{E_c}$ *et* $\dfrac{v'}{v}$. *Conclure.*

S 71. *a*) $\beta = \dfrac{v}{c} = 0{,}95$ d'où $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 3{,}20$.

Son énergie cinétique $E_c = (\gamma - 1)mc^2 = (3{,}20 - 1) \times 0{,}51 = 1{,}12$ MeV.

b) Son énergie totale $E = \gamma mc^2 = 3{,}2 \times 0{,}51 = 1{,}63$ MeV.

c) — *Première méthode.* La première idée est d'utiliser l'expression $p = \gamma mv$ dans laquelle γ, m et v sont connus. Cependant il est commode de modifier cette expression pour faire apparaître des énergies exprimées en MeV, pour cela multiplions et divisons par c de la façon suivante :

$$pc = \gamma \cdot mc^2 \cdot \frac{v}{c}.$$

On en déduit $pc = \gamma \cdot mc^2 \cdot \beta = 3{,}20 \times 0{,}51 \times 0{,}95 = 1{,}55$ MeV,
d'où $p = 1{,}55$ MeV/c.

— *Deuxième méthode.* $\beta = \dfrac{pc}{E} = \dfrac{pc}{\gamma \cdot mc^2}$ d'où $pc = \gamma \cdot mc^2 \cdot \beta$: on se ramène au calcul précédent.

d) $p' = 2p = 1{,}55 \times 2 = 3{,}1$ MeV/c.

- $E' = \sqrt{(p'c)^2 + (mc^2)^2} = \sqrt{3{,}1^2 + 0{,}51^2} = 3{,}14$ MeV
  $\dfrac{E'}{E} = \dfrac{3{,}14}{1{,}63} = 1{,}93.$
- $E'_c = E' - mc^2 = 3{,}14 - 0{,}51 = 2{,}63$ MeV
  $\dfrac{E'_c}{E_c} = \dfrac{2{,}63}{1{,}12} = 2{,}35.$

• $\beta' = \frac{p'c}{E'} = \frac{3,1}{3,14} = 0,987$, donc $v' = \beta' c = 0,987\ c$

$\frac{v'}{v} = \frac{0,987}{0,95} = 1,04.$

• Ainsi la quantité de mouvement, l'énergie cinétique, l'énergie totale ont varié de façon appréciable au cours de cette accélération, au contraire la vitesse a peu varié.

E 72. a) *Des électrons sont accélérés par une tension* $U = 100\,000$ V. *Quelle est leur énergie cinétique? Sont-ils relativistes? Quelle est leur vitesse?*

b) Des protons sont accélérés par une tension $U = 100\,000$ V. *Quelle est leur énergie cinétique? Sont-ils relativistes? Quelle est leur vitesse?*

Données :
— *électrons et protons sont initialement immobiles;*
— *masse d'un électron* $m = 0,51\ MeV/c^2$;
— *masse d'un proton* $m' = 938\ MeV/c^2$.

S 72. (Rédaction abrégée.)

a) • $E_c = eU = 0,1$ MeV.

• $\frac{E_c}{E_0} = \frac{0,1}{0,51} = 0,196 > 0,01$: l'électron est relativiste.

• Deux méthodes de calcul de v :

— calculer γ, puis β : $(\gamma - 1) = \frac{E_c}{E_0} = 0,196$; $\gamma = 1,196$; $\sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{\gamma} = 0,836$;
$\beta = 0,549$; $v = \beta c = 1,65 \cdot 10^8\ m \cdot s^{-1}$;

— calculer E, pc puis β :
$E = E_0 + E_c = \sqrt{(pc)^2 + E_0^2}$; $pc = \sqrt{E_c^2 + 2E_0E_c} = 0,335$ MeV;
$\beta = \frac{pc}{E} = 0,549$; $v = \beta c = 1,65 \cdot 10^8\ m \cdot s^{-1}$.

b) • $E'_c = eU = 0,1$ MeV : les protons ont la même énergie cinétique que les électrons précédents.

• $\frac{E'_c}{E'_0} = \frac{0,1}{938} \simeq 10^{-4} < 0,01$: les protons ne sont pas relativistes.

• Pour calculer v' on peut utiliser l'expression de mécanique newtonienne $E'_c = \frac{1}{2} m'v'^2$, d'où $v' = \sqrt{\frac{2E'_c}{m'}}$.

Pour faire l'application numérique, on peut raisonner :
— en unités MeV et MeV/c^2,

$$v' = \sqrt{\frac{2 \times 0,1\ MeV}{938\ \frac{MeV}{c^2}}} = \sqrt{2,13 \cdot 10^{-4} \cdot c^2} = 1,46 \cdot 10^{-2}\,c = 4,38 \cdot 10^6\ m \cdot s^{-1};$$

— en unités internationales :

$$E'_c = 0,1 \times 10^6 \times 1,6 \cdot 10^{-19} = 1,6 \cdot 10^{-14}\ J;$$

$$m' = 938 \frac{MeV}{c^2} = \frac{938 \times 10^6 \times 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{(3 \cdot 10^8)^2} = 1{,}667 \cdot 10^{-27} \text{ kg};$$

$$v' = 4{,}38 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

• Remarque : on peut aussi calculer v' en utilisant les deux méthodes du a) : c'est déconseillé lorsque la particule n'est pas relativiste.

• Ainsi des particules de même énergie cinétique peuvent être l'une relativiste, l'autre non relativiste : ce qui compte c'est le rapport $\frac{E_c}{E_0}$. Cela explique que seules les particules de faible énergie de repos E_0, donc de faible masse m, peuvent devenir relativistes.

E 73. *(Les particules ultra-relativistes.)*

a) *Démontrer que la quantité de mouvement d'une particule relativiste* $p = mc\sqrt{\gamma^2 - 1}$.

b) *On dit qu'une particule est ultra-relativiste si le coefficient* $\gamma > 10$.

α) *A partir de quelle vitesse une particule est-elle ultra-relativiste?*

β) *Commenter la phrase suivante extraite d'une revue « ... en fin de mouvement, dans le super-synchroton à protons, les protons sont accélérés à vitesse constante ».*

γ) *Que devient, de façon approchée, l'expression établie au* a) *pour une particule ultra-relativiste?*

c) *A partir de quelle énergie totale,*
— *un électron devient-il ultra-relativiste?*
— *un proton devient-il ultra-relativiste?*

Données : masse de l'électron $m_e = 0{,}51$ MeV/c^2
masse du proton $m_p = 938$ MeV/c^2.

d) *Discuter et compléter la phrase suivante : « Les particules de masse nulle (photons, neutrino, ...) se déplacent obligatoirement à la vitesse c de la lumière, elles ont une énergie* $E = ...$ »

S 73. *a)* • Présentation de la démarche : on sait exprimer p en fonction de E_c et E_0; comme E_c et E_0 ont des expressions connues faisant justement intervenir les variables m, c et γ, on en déduira l'expression demandée.

• $E = E_c + E_0 = \sqrt{(pc)^2 + E_0^2}$; élevons au carré $E_c^2 + E_0^2 + 2E_0E_c = (pc)^2 + E_0^2$; d'où $pc = \sqrt{E_c^2 + 2E_0E_c}$.

• Comme $E_c = (\gamma - 1)E_0$, $pc = \sqrt{(\gamma - 1)^2 E_0^2 + 2(\gamma - 1)E_0^2} = E_0\sqrt{\gamma^2 - 1}$.
Remplaçons E_0 par mc^2 et simplifions par c : $p = mc\sqrt{\gamma^2 - 1}$.

b) α) Si $\gamma > 10$;

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 10$; $\sqrt{1-\beta^2} < 0{,}1$; $1 - \beta^2 < 0{,}01$; $\beta^2 > 0{,}99$; $\beta > 0{,}995$; $v = \beta c$ est donc supérieur à $0{,}995 \times 3 \cdot 10^8 = 2{,}98 \cdot 10^8$ m·s^{-1}.

β) Dans la dernière phase d'accélération, les protons sont ultra-relativistes, leur vitesse est donc supérieure à $2{,}98 \cdot 10^8$ m·s^{-1}. Quelles que soient les performances de l'accélérateur, cette vitesse ne pourra dépasser $c = 3 \cdot 10^8$ m·s^{-1} : la dernière phase d'accélération fait donc très peu changer la vitesse,

d'où l'expression « accélération à vitesse constante » qu'il serait préférable d'écrire « accélération à vitesse pratiquement constante ».

γ) Lorsque la particule est ultra-relativiste, $\gamma > 10$, $\gamma^2 > 100$, on peut donc négliger au centième près 1 devant γ^2 : l'expression $p = mc\sqrt{\gamma^2 - 1}$ devient alors $p \simeq mc\gamma$. On préfère l'écrire $pc \simeq mc^2\gamma$ soit $pc \simeq E$.

c) • Un électron devient ultra-relativiste si son énergie totale $E = \gamma m_e c^2$ devient supérieure à $10\, m_e c^2$ soit supérieure à $10 \times 0{,}51 = 5{,}1$ MeV.
• Un proton devient ultra-relativiste si son énergie totale est supérieure à $10\, m_p c^2 = 9\,380$ MeV.

d) • La phrase donne des noms de particules de masse nulle, nous partons donc du fait que de telles particules existent (nous les découvrirons dans la suite de ce cours).
• Est-ce qu'une particule de masse nulle a obligatoirement la vitesse c de la lumière lorsqu'elle se propage dans le vide (ce que la phrase ne précise pas, mais nous le supposons)?
Si $m = 0$, $E_0 = mc^2 = 0$. D'après $E = \sqrt{(pc)^2 + E_0^2}$, $E = pc$.
D'après $\beta = \dfrac{pc}{E}$, $\beta = \dfrac{pc}{pc} = 1$, donc $v = c$: l'affirmation est donc exacte.
• Dans le calcul précédent nous avons découvert que $E = pc$, nous pouvons donc compléter la phrase.

E 74. *(Choc élastique d'un proton sur un proton immobile.)*

a) *Un proton 1 ayant une vitesse* $\vec{v_1}$ *rencontre un proton au repos en* O. *La collision est élastique. les deux protons repartent avec de nouvelles vitesses* $\vec{v_2}$ *et* $\vec{v_3}$. *Les protons ne sont pas relativistes. En appliquant les lois de conservation de la mécanique newtonienne à ce choc élastique, montrer que l'angle entre* $\vec{v_2}$ *et* $\vec{v_3}$ *est droit.*

b) *Le proton 1, relativiste, à une énergie totale* E_1, *une quantité de mouvement* $\vec{p_1}$. *Le proton cible* O *est immobile. Le choc est élastique. Les protons après le choc ont pour grandeurs caractéristiques* $(E_2, \vec{p_2})$ *et* $(E_3; \vec{p_3})$. *On appelle* E_0 *l'énergie de masse d'un proton.*

α) *Écrire les deux lois de conservation intéressantes.*

β) *Démontrer que.* $2c^2 \cdot \vec{p_2} \cdot \vec{p_3} = (E_1^2 + E_0^2) - (E_2^2 + E_3^2)$.

γ) *On appelle* φ *l'angle entre les deux vecteurs* $\vec{v_2}$ *et* $\vec{v_3}$, *juste après le choc. Exprimer* $\cos\varphi$.

δ) *On donne* $p_1 = 2072$ MeV/c; $p_2 = 1968$ MeV/c; $E_0 = 938$ MeV.
Calculer E_1, E_2, E_3, p_3, $\cos\varphi$ *et* φ *en degrés.*

(D'après bac)

88 Choc de particules.

a) **Choc élastique, choc inélastique.**
• Le choc est dit élastique si on retrouve après le choc exactement les mêmes particules qu'avant le choc : il y a conservation des particules.
• Le choc est inélastique s'il n'y a pas conservation des particules : certaines particules initialement présentes avant le

choc peuvent disparaître, certaines particules présentes après le choc sont des particules nouvelles.

• Remarque. Dans une chambre à bulles (chambre contenant du dihydrogène liquide juste sur le point de passer à l'état gazeux), des bulles de dihydrogène H_2 gazeux se forment tout le long de la trajectoire d'une particule chargée, cette trajectoire ainsi visualisée peut être photographiée. Une particule neutre ne laisse aucune trace.

b) **Les lois de conservation.**

Tous les chocs entre particules obéissent à des lois de conservation :

— conservation vectorielle de la quantité de mouvement;

— conservation de l'énergie totale du système;

— conservation de la charge électrique totale du système;

— conservation du nombre de nucléons A (pour un proton : $A=1$; pour un neutron : $A=1$; pour un pion $+$, $-$ ou neutre noté π^+, π^- ou π^0 : $A=0$).

Remarque : dans un choc élastique la conservation de l'énergie totale se ramène à la conservation de l'énergie cinétique.

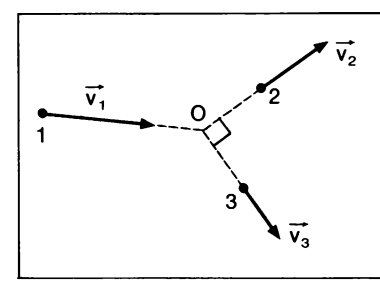
S 74. *a*) • Le choc élastique obéit aux lois de conservation :

— de la quantité de mouvement :

$$\vec{p_1}+\vec{0}=\vec{p_2}+\vec{p_3};$$

— de l'énergie cinétique :

$$E_{c_1}+0=E_{c_2}+E_{c_3}.$$



• En mécanique newtonienne, ces conditions s'écrivent :

— d'une part :

$$m\vec{v_1}+\vec{0}=m\vec{v_2}+m\vec{v_3}$$

soit $$\vec{v_1}=\vec{v_2}+\vec{v_3} \qquad (1)$$

— d'autre part :

$$\frac{1}{2}mv_1^2=\frac{1}{2}mv_2^2+\frac{1}{2}mv_3^2$$

soit $$v_1^2=v_2^2+v_3^2 \qquad (2)$$

• Élevons (1) au carré scalaire $\quad \vec{v_1}^2=\vec{v_2}^2+\vec{v_3}^2+2\vec{v_2}\cdot\vec{v_3}$

soit $\quad v_1^2=v_2^2+v_3^2+2\vec{v_2}\cdot\vec{v_3}.$

Compte tenu de (2), on en déduit $\vec{v_2}\cdot\vec{v_3}=\vec{0}$, en supposant non nuls $\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$, cela implique que $\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$ sont perpendiculaires.

b) α) • Le choc élastique obéit aux lois de conservation :

— de la quantité de mouvement :

$$\vec{p_1}+\vec{0}=\vec{p_2}+\vec{p_3} \qquad (1)$$

– de l'énergie totale :

$$E_1 + E_0 = E_2 + E_3 \qquad (2)$$

(Attention : ne pas oublier de tenir compte de l'énergie totale E_0 du proton cible qui se confond avec son énergie de repos puisque le proton cible est immobile.)

β) • Modifions la condition (1). Élevons (1) au carré scalaire :

$$\vec{p_1}^2 = \vec{p_2}^2 + \vec{p_3}^2 + 2\,\vec{p_2}\cdot\vec{p_3}$$

soit

$$p_1^2 = p_2^2 + p_3^2 + 2\,\vec{p_2}\cdot\vec{p_3} \qquad (1')$$

• Comme $E_1 = \sqrt{(p_1 c)^2 + E_0^2}$, $p_1^2 c^2 = E_1^2 - E_0^2$; de même $p_2^2 c^2 = E_2^2 - E_0^2$ et $p_3^2 c^2 = E_3^2 - E_0^2$.
Multiplions (1') par c^2 : $p_1^2 c^2 = p_2^2 c^2 + p_3^2 c^2 + 2\,c^2 \cdot \vec{p_2}\cdot\vec{p_3}$ et tenons compte des relations précédentes, il s'ensuit :

$$E_1^2 - E_0^2 = E_2^2 - E_0^2 + E_3^2 - E_0^2 + 2\,c^2 \cdot \vec{p_2}\cdot\vec{p_3}.$$

On aboutit finalement à la relation proposée :

$$2\,c^2 \cdot \vec{p_2}\cdot\vec{p_3} = (E_1^2 + E_0^2) - (E_2^2 + E_3^2) \qquad (1'')$$

γ) • D'après (1'') $\quad 2\,c^2 \cdot p_2 p_3 \cos(\vec{p_2}, \vec{p_3}) = (E_1^2 + E_0^2) - (E_2^2 + E_3^2)$.

• $(\vec{p_2}, \vec{p_3}) = (\vec{v_2}, \vec{v_3}) = \varphi$, par suite :

$$\cos\varphi = \frac{(E_1^2 + E_0^2) - (E_2^2 + E_3^2)}{2\,c^2 p_2 p_3} = \frac{(E_1^2 + E_0^2) - (E_2^2 + E_3^2)}{2\,p_2 c \cdot p_3 c}.$$

δ) • $E_1 = \sqrt{(p_1 c)^2 + E_0^2} = \sqrt{2\,072^2 + 938^2} = 2\,274$ MeV.

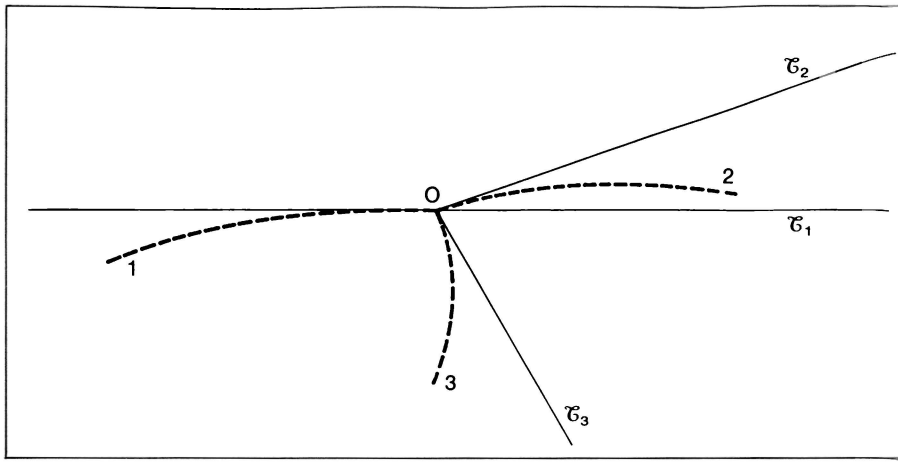
• $E_2 = \sqrt{(p_2 c)^2 + E_0^2} = \sqrt{1\,968^2 + 938^2} = 2\,180$ MeV.

• D'après la loi (2) : $E_1 + E_0 = E_2 + E_3$, d'où $E_3 = 1\,032$ MeV.

• $p_3^2 c^2 = E_3^2 - E_0^2$, $p_3 c = \sqrt{E_3^2 - E_0^2} = \sqrt{1\,032^2 - 938^2} = 430$ MeV,
d'où $p_3 = 430$ MeV/c.

• $\cos\varphi = \dfrac{(2\,274^2 + 938^2) - (2\,180^2 + 1\,032^2)}{2 \times 1\,968 \times 430} = 0{,}138$ d'où $\alpha = 82°$.

E 75. *(Choc élastique.)*
Dans une chambre à bulles, un proton en mouvement heurte un proton au repos. La chambre à bulles est placée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, orthogonal au plan du cliché. Le cliché obtenu donne la trajectoire 1 du proton incident et les trajectoires 2 et 3 des deux protons après le choc. On a représenté les tangentes aux trajectoires au moment du choc, $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ et $\mathcal{T}_3$.



a) *Les trajectoires du proton incident et des protons après le choc élastique sont des arcs de cercle. Donner l'expression reliant le rayon de l'arc de cercle à la quantité de mouvement du proton.*
D'après la figure, quel est le sens du vecteur champ magnétique : vers l'avant ou vers l'arrière?

b) *On donne* $p_1 = 2000$ MeV/c. *A l'aide d'un abaque, on mesure les rayons* R_1, R_2 *et* R_3 *des trajectoires circulaires* 1, 2 *et* 3, *on trouve :* $R_1 = 340$ cm, $R_2 = 300$ cm *et* $R_3 = 113$ cm.
La masse d'un proton est 938 MeV/c^2.

α) *Déterminer la quantité de mouvement de chaque proton après le choc.*

β) *Le proton projectile et les deux protons après le choc sont-ils relativistes?*

γ) *Vérifier graphiquement s'il y a conservation de la quantité de mouvement.*

δ) *Calculer l'énergie totale des protons avant et après le choc. Y a-t-il conservation de l'énergie totale?*

ε) *Y a-t-il conservation de l'énergie cinétique et de la masse au cours de ce choc élastique?*

(D'après bac)

S 75. *a)* • Désignons par $p = \gamma mc$ la quantité de mouvement d'un proton. Lorsqu'un proton est lancé perpendiculairement à un champ magnétique uniforme, il décrit une trajectoire circulaire dans un plan perpendiculaire à $\vec{B}$, à vitesse constante (donc avec une quantité de mouvement constante en module). Le rayon de cette trajectoire est $R = \dfrac{p}{|q|B} = \dfrac{p}{eB}$.

• Admettons que la formule de Lorentz $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ reste valable. La force magnétique $\vec{F}$ est centripète. Considérons la trajectoire 1 par exemple, la force $\vec{F}$ juste avant O est dirigée vers le bas du cliché. Comme le trièdre $(q\vec{v}, \vec{B}, \vec{F})$ est direct, d'après la règle des 3 doigts de la main droite, $\vec{B}$ pointe vers l'avant du cliché.

b) α) Comme $p_1 = R_1 eB$, $p_2 = R_2 eB$ et $p_3 = R_3 eB$ il s'ensuit :

$$\frac{p_1}{R_1} = \frac{p_2}{R_2} = \frac{p_3}{R_3}.$$

$$p_2 = p_1 \frac{R_2}{R_1} = 2\,000 \times \frac{300}{340} = 1\,765 \text{ MeV/c}$$

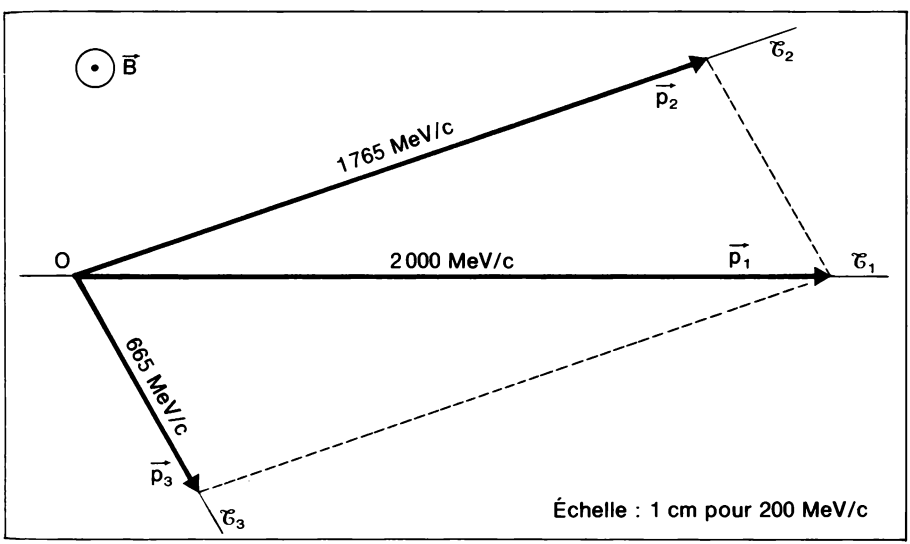
$$p_3 = p_1 \frac{R_3}{R_1} = 2\,000 \times \frac{113}{340} = 665 \text{ MeV/c}.$$

β) • Une particule est relativiste si son rapport $\frac{pc}{E_0} > 0{,}1$ (revoir ℳ 87).

• Pour le proton projectile (ou proton incident) $\frac{p_1 c}{E_0} = \frac{2\,000}{938} > 0{,}1$: le proton est relativiste.

• Pour le proton 2 (c'est-à-dire celui qui chemine suivant la trajectoire 2), $\frac{p_2 c}{E_0} = \frac{1765}{938} > 0{,}1$, ce proton 2 est relativiste. Il en est de même du proton 3 pour lequel $\frac{p_3 c}{E_0} = \frac{665}{938} > 0{,}1$.

γ) • Avant le choc le système, constitué par le proton incident et le proton cible, au repos, a pour quantité de mouvement $\vec{p_1} + \vec{0} = \vec{p_1}$. Un représentant de $\vec{p_1}$ est dessiné à partir de O : il est porté par $\mathcal{C}_1$ et a pour longueur 10 cm (échelle : 1 cm représente 200 MeV/c).



• Après le choc le système, constitué par le proton 2 et le proton 3, a pour quantité de mouvement $\vec{p_2} + \vec{p_3}$. Un représentant de $\vec{p_2}$ est dessiné à partir de O : il est porté par $\mathcal{C}_2$ et a pour longueur 8,8 cm (avec la même échelle); un représentant de $\vec{p_3}$ est représenté à partir de O : il est porté par $\mathcal{C}_3$ et a pour longueur 3,3 cm (toujours avec la même échelle).

• On construit le vecteur $\vec{p_2} + \vec{p_3}$, on constate qu'il est égal à $\vec{p_1}$. On vérifie ainsi que le vecteur quantité de mouvement du système se conserve.

δ) • L'énergie totale du système avant le choc est :

$$E_1 + E_0 = \sqrt{(p_1 c)^2 + E_0^2} + E_0 = \sqrt{2\,000^2 + 938^2} + 938 = 2\,209 + 938 = 3\,147 \text{ MeV}.$$

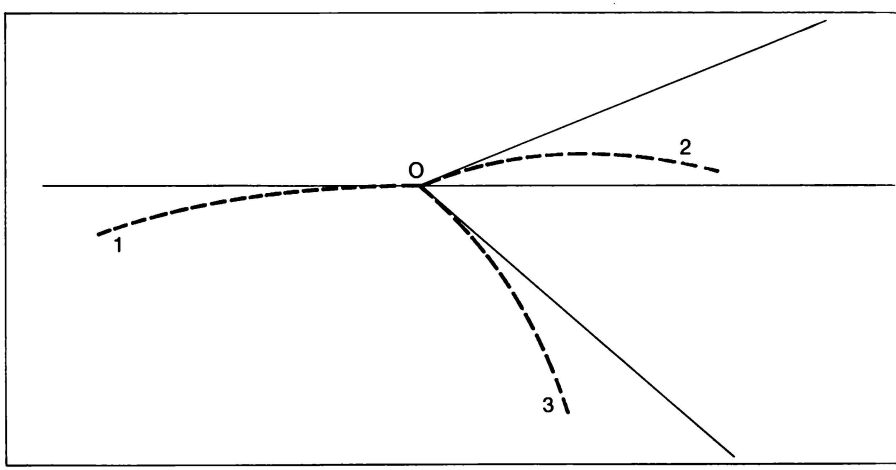
• L'énergie totale du système après le choc est :

$$E_2 + E_3 = \sqrt{1\,765^2 + 938^2} + \sqrt{665^2 + 938^2} = 1\,999 + 1\,150 = 3\,149 \text{ MeV}.$$

• Avec une très bonne précision (écart de 2 MeV, soit un écart relatif $\frac{2}{3\,149} \simeq 6{,}3 \cdot 10^{-4}$) on vérifie que l'énergie totale se conserve.

ε) • $E_1 + E_0 = E_2 + E_3$, d'où $(E_{c,1} + E_0) + E_0 = (E_{c,2} + E_0) + (E_{c,3} + E_0)$.
Par suite $E_{c,1} + 0 = E_{c,2} + E_{c,3}$: il y a conservation de l'énergie cinétique dans un choc élastique.
• Évidemment puisque les particules se conservent au cours d'un choc élastique, la masse se conserve.

E 76. *(Choc inélastique.)*
Une chambre à bulles est placée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, *orthogonal au plan du cliché reproduit ci-dessous.*
Un proton incident de quantité de mouvement $p_1 = 2\,127$ MeV/c *a une trajectoire circulaire de rayon* $R_1 = 408$ cm. *Il heurte un proton au repos, en* O. *Après la collision on observe deux trajectoires* 2 *et* 3, *de rayons respectifs* $R_2 = 100$ cm *et* $R_3 = 180$ cm. *Ces trois trajectoires sont dans le plan du cliché.*



a) *Déterminer les quantités de mouvement* p_1, p_2 *et* p_3 *des trois particules* 1, 2 *et* 3.

b) *Construire des représentants de* $\vec{p_1}$, $\vec{p_2}$ *et* $\vec{p_3}$. *Que constate-t-on? En admettant qu'il existe après le choc, en plus des particules* 2 *et* 3, *une particule* 4 :
— *quelle est la charge de cette particule* 4?
— *quelle est la quantité de mouvement* p_4 *de cette particule* 4?
— *quelle est sa trajectoire?*

c) *Les particules possibles après le choc sont : proton, neutron, pion positif* π^+, *pion négatif* π^-, *pion neutre* π^o.

α) *A partir des courbures des trajectoires 2 et 3 montrer que l'on peut éliminer une des particules chargées proposées.*

β) *A partir des lois de conservation de la charge et du nombre de nucléons montrer qu'il y a trois hypothèses possibles pour les particules 2, 3 et 4.*

d) *Parmi ces trois hypothèses, quelle est celle la plus plausible, c'est-à-dire qui respecte la conservation de l'énergie totale?*

e) *Y a-t-il conservation de l'énergie cinétique et de la masse du système?*

Données : masse du proton 938 MeV/c^2
masse du neutron 939 MeV/c^2
masse du π^+ ou π^- 139 MeV/c^2
masse du π^0 135 MeV/c^2.

(D'après bac)

S 76. *a)* Le proton 1 a pour charge + e, supposons que les particules 2 et 3 ont des charges égales à e, en valeur absolue.

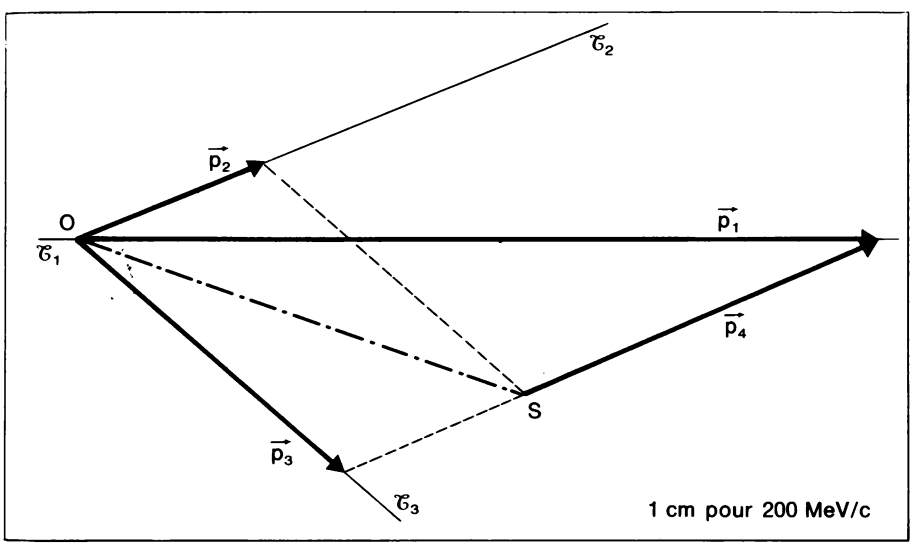
Alors $R_1 = \frac{p_1}{eB}$; $R_2 = \frac{p_2}{eB}$; $R_3 = \frac{p_3}{eB}$.

Donc $\frac{p_1}{R_1} = \frac{p_2}{R_2} = \frac{p_3}{R_3}$.

Par suite $p_2 = p_1 \frac{R_2}{R_1} = 521$ MeV/c;

$p_3 = p_1 \frac{R_3}{R_1} = 938$ Mev/c.

b)



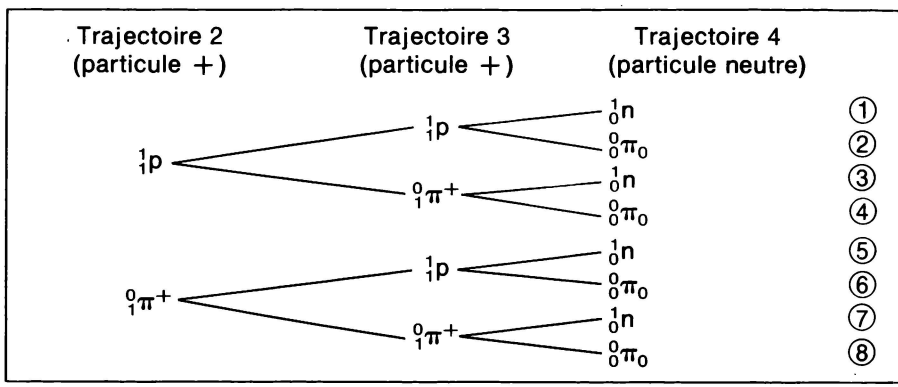
• Le système initial constitué par le proton incident et le proton cible a pour vecteur quantité de mouvement $\vec{p_1} + \vec{0} = \vec{p_1}$: ce vecteur est représenté à partir

de O, il a pour support la tangente $\mathcal{C}_1$ en O à la courbe 1, l'échelle choisie est 1 cm représente 200 MeV/c.
Représentons, à partir de O, avec la même échelle, les vecteurs $\vec{p_2}$ et $\vec{p_3}$. Construisons le vecteur $\overrightarrow{OS} = \vec{p_2} + \vec{p_3}$. On constate que $\overrightarrow{OS}$ est différent de $\vec{p_1}$.

- Une particule 4, neutre puisqu'elle ne laisse pas de trace, s'est donc formée en plus des particules chargées 2 et 3.
- Cette particule 4 a une quantité de mouvement $\vec{p_4}$ telle que $\overrightarrow{OS} + \vec{p_4} = \vec{p_1}$. Sur le graphique on relève que le représentant de $\vec{p_4}$ a pour longueur 5,1 cm. Compte-tenu de l'échelle, cela signifie que le module de ce vecteur $p_4 = 5{,}1 \times 200 = 1020$ MeV/c (aux incertitudes de mesures près).
- La particule 4, neutre, ne subit aucune force magnétique : elle est pratiquement en mouvement rectiligne et uniforme si on néglige l'effet de son poids et l'effet des frottements dans le fluide de la chambre à bulles. Elle part de O dans la direction et le sens de $\vec{p_4}$.

c) α) Les trajectoires circulaires 1, 2 et 3 s'incurvent dans le même sens sous l'action de la force magnétique : les particules ont donc des charges de même signe : comme 1 est un proton, les charges de 2 et 3 sont positives. Par suite la particule 2 ou bien la particule 3 ne peut être un pion négatif π^-.

β) Dressons l'inventaire de toutes les hypothèses à priori possibles : dans le tableau chaque particule est notée ${}^{A}_{Z}X$, A désigne le nombre de nucléons, Z le nombre de charges (rappelons que pour un méson π, ou pion, A = 0).



- En remarquant que le système initial (proton + proton) a un nombre de nucléons égal à 2 et un nombre de charges égal à 2, on constate :
— que les 8 hypothèses vérifient la loi de conservation de la charge;
— que les hyothèses ①, ④, ⑥, ⑦ et ⑧ sont à rejeter car elles ne vérifient pas la conservation du nombre de nucléons.
- En résumé trois hypothèses subsistent :

② $\quad p + p \longrightarrow p + p + \pi_0$

③ $\quad p + p \longrightarrow p + \pi^+ + n$

⑤ $\quad p + p \longrightarrow \pi^+ + p + n.$

d) • L'énergie totale du système initial est :
$E_i = E_1 + E_0 = \sqrt{(p_1 c)^2 + E_0^2} + E_0 = 3\,263$ MeV.

• L'énergie totale du système final est $E_f = E_2 + E_3 + E_4$.
Dans le tableau suivant, on a calculé E_f pour les 3 hypothèses ②, ③ et ⑤ et l'écart $\Delta E = E_f - E_i$.

	Trajectoire 2 $p_2 = 521$ MeV/c	Trajectoire 3 $p_3 = 938$ MeV/c	Trajectoire 4 $p_4 = 1\,020$ MeV/c	ΔE (en MeV)
②	proton $E_2 = 1\,073$ MeV	proton $E_3 = 1\,326$ MeV	pion neutre $E_4 = 1\,029$ MeV	165
③	proton $E_2 = 1\,073$ MeV	pion + $E_3 = 948$ MeV	neutron $E_4 = 1\,386$ MeV	144
⑤	pion + $E_2 = 539$ MeV	proton $E_3 = 1\,326$ MeV	neutron $E_4 = 1\,386$ MeV	− 12

• Conclusion : c'est l'hypothèse ⑤ qui respecte le mieux la conservation de l'énergie totale, c'est elle que nous devons finalement garder.
(Remarque : la différence $\Delta E = -12$ MeV est faible, elle peut être imputée aux erreurs de mesures.)

e) • L'énergie cinétique initiale du système est :

$$E_{c,i} = E_{c,1} + 0 = (E_1 - E_0) = \sqrt{(p_1 c)^2 + E_0^2} - E_0 = 1\,387 \text{ MeV}.$$

L'énergie cinétique finale du système (particule 2 : pion +; particule 3 : proton; particule 4 : neutron) est, en se reportant à la ligne ⑤ du tableau) :

$$E_{c,f} = (539 - 139) + (1\,326 - 938) + (1\,386 - 939) = 1\,235 \text{ MeV}.$$

On observe une variation d'énergie cinétique $E_{c,f} - E_{c,i} = -152$ MeV, cette variation importante ne peut être imputée aux erreurs de mesure : l'énergie cinétique ne se conserve pas au cours de ce choc inélastique.

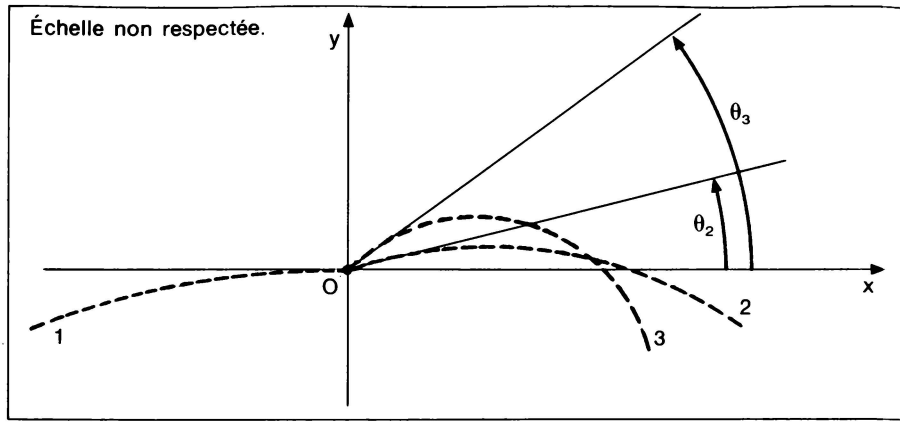
• La masse initiale du système est $m_i = (938 + 938) = 1\,876$ MeV/c^2.
La masse finale du système (pion +, proton, neutron) est :

$$m_f = (139 + 938 + 939) = 2\,016 \text{ MeV}/c^2.$$

La masse du système a varié de $m_f - m_i = 140$ MeV/c^2 : elle ne s'est pas conservée au cours de ce choc inélastique.

• Note : s'il n'y avait pas d'incertitude sur les mesures nous devrions trouver $E_{cf} - E_{ci} = -(m_f - m_i)c^2$, voir Pourquoi à la fin de ce chapitre.

E 77. *On observe, dans une chambre à bulles, un événement de choc proton-proton qui présente l'allure reproduite ci-dessous.*



La mesure des quantités de mouvement a donné pour :
— *le proton cible :* $p_0 = 0$,
— *le proton incident :* $p_1 = 5\,000$ MeV/c,
— *la particule 2 émise :* $p_2 = 2\,500$ MeV/c,
— *la particule 3 émise :* $p_3 = 1\,000$ MeV/c.
Dans le système d'axes (Ox, Oy) *représenté, les angles ont les valeurs algébriques suivantes :*

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{p_1}) = \theta_1 = 0°; \quad (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{p_2}) = \theta_2 = 15°; \quad (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{p_3}) = \theta_3 = 35°.$$

Les conditions de choc sont telles qu'on pourra rencontrer après le choc, deux types distincts de particules, à l'exclusion de tout autre :
— *les nucléons (proton de masse* 938 MeV/c^2; *neutron de masse* 939 MeV/c^2);
— *les mésons* π *ou pions* (π^+ *et* π^- *de masse* 139 MeV/c^2 *et* π^0 *de masse* 135 MeV/c^2).

a) *L'examen du schéma permet-il de prévoir, sans aucun tracé ni calcul :*
— *le signe des charges des particules émises ayant laissé une trace sur le cliché?*
— *le caractère non élastique du choc?*

b) *Écrire l'équation traduisant la conservation de la quantité de mouvement. En déduire la quantité de mouvement* $\overrightarrow{p_4}$ *de la particule non visible, dont on déterminera les composantes* p_{4x} *et* p_{4y}, *le module* p_4 *et l'angle* $\theta_4 = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{p_4})$.

c) *Calculer l'énergie totale* E_4 *de cette même particule dans les trois hypothèses* A, B, C.

	Particule incidente 1	*Cible*	*Particule* 2	*Particule* 3	*Particule* 4
A	*proton*	*proton*	*proton*	*proton*	X_A
B	*proton*	*proton*	*proton*	π^+	X_B
C	*proton*	*proton*	π^+	*proton*	X_C

d) *Choisir, parmi les cinq particules possibles (proton, neutron, π^+, π^-, π^0), celles par lesquelles il convient de remplacer X_A, X_B, X_C pour que soient vérifiées, dans chaque hypothèse, la conservation de la charge électrique et la conservation du nombre de nucléons.*

e) *Connaissant la quantité de mouvement p_4 et l'énergie E_4 de cette particule, calculer sa masse. En déduire la réaction qui s'est effectivement produite parmi les trois évoquées ci-dessus.*

(D'après bac)

S 77. *a*) • Les trois trajectoires circulaires des particules chargées 1, 2 et 3 s'incurvent dans le même sens sous l'action de la force magnétique due au champ magnétique uniforme qui est créé dans la chambre à bulles : les trois particules ont donc des charges de même signe, comme la particule 1 est un proton, les trois particules ont donc une charge positive.
• La quantité de mouvement initiale du système (proton 1; proton cible) est $\vec{p_1}$: ce vecteur représenté à partir de O est porté sur l'axe Ox.
La quantité de mouvement $(\vec{p_2}+\vec{p_3})$ des particules 2 et 3, représentée à partir de O, est à l'évidence dirigée vers les x et les y croissants : elle ne peut être égale à $\vec{p_1}$. Pour assurer la conservation de la quantité de mouvement, une particule (4), neutre puisqu'elle ne laisse pas de trace, est nécessaire. (Nous admettrons, conformément à l'énoncé, qu'il n'y a qu'une particule neutre.)
La particule neutre n'existait pas avant le choc : le choc est donc inélastique.

b) • Avant le choc, la quantité de mouvement du système (proton 1; proton cible) est $\vec{p_1}$.
Après le choc, la quantité de mouvement du système (particule 2; particule 3; particule 4) est $\vec{p_2}+\vec{p_3}+\vec{p_4}$.
La quantité de mouvement se conserve :

$$\vec{p_1}=\vec{p_2}+\vec{p_3}+\vec{p_4}, \quad \text{d'où} \quad \vec{p_4}=\vec{p_1}-\vec{p_2}-\vec{p_3}.$$

• Comme :

$$\vec{p_1}\begin{vmatrix}5\,000 \text{ MeV/c}\\0\end{vmatrix} \qquad \vec{p_2}\begin{vmatrix}2\,500\cos\theta_2=2\,415 \text{ MeV/c}\\2\,500\sin\theta_2=\ 647 \text{ MeV/c}\end{vmatrix}$$

$$\vec{p_3}\begin{vmatrix}1\,000\cos\theta_3=819 \text{ MeV/c}\\1\,000\sin\theta_3=574 \text{ MeV/c}\end{vmatrix}$$

on en déduit $\vec{p_4}\begin{vmatrix}p_{4x}=5\,000-2\,415-819=\ 1\,766 \text{ MeV/c}\\p_{4y}=\ 0-\ 647-574=-1\,221 \text{ MeV/c}\end{vmatrix}$

• $p_4=\sqrt{p_{4x}^2+p_{4y}^2}=2\,147$ MeV/c.

• $\text{tg}\,\theta_4=\dfrac{p_{4y}}{p_{4x}}=-0{,}691$ d'où $(\overrightarrow{Ox}, \vec{p_4})=\theta_4=-34{,}7°$.

c) • Présentation de la démarche : au cours d'un choc l'énergie totale du système se conserve; rappelons qu'une particule de quantité de mouvement p, de masse m, a pour énergie totale $E=\sqrt{(pc)^2+(mc^2)^2}$; en calculant les énergies totales des particules 1, cible, 2 et 3, on en déduira l'énergie totale E_4 de la particule 4.

• Hypothèse A.

$E_1 = \sqrt{5\,000^2 + 938^2} = 5\,087$ MeV; $E_{cible} = 938$ MeV;

$E_2 = \sqrt{2\,500^2 + 938^2} = 2\,670$ MeV; $E_3 = \sqrt{1\,000^2 + 938^2} = 1\,371$ MeV;

donc $E_4 = E_1 + E_{cible} - E_2 - E_3 = 1\,984$ MeV.

• Hypothèse B.

$E_1 = \sqrt{5\,000^2 + 938^2} = 5\,087$ MeV; $E_{cible} = 938$ MeV;

$E_2 = \sqrt{2\,500^2 + 938^2} = 2\,670$ MeV; $E_3 = \sqrt{1\,000^2 + 139^2} = 1\,010$ MeV;

donc $E_4 = E_1 + E_{cible} - E_2 - E_3 = 2\,345$ MeV.

• Hypothèse C.

$E_1 = 5\,087$ MeV; $E_{cible} = 938$ MeV;

$E_2 = \sqrt{2\,500^2 + 139^2} = 2\,504$ MeV; $E_3 = \sqrt{1\,000^2 + 938^2} = 1\,371$ MeV;

donc $E_4 = E_1 + E_{cible} - E_2 - E_3 = 2\,150$ MeV.

d) • Notons chaque particule ${}^{A}_{Z}X$: A, nombre de nucléons; Z, nombre de charges.

• Pour l'hypothèse A : ${}^{1}_{1}p + {}^{1}_{1}p \longrightarrow {}^{1}_{1}p + {}^{1}_{1}p + {}^{A}_{Z}X_A$. D'après la conservation du nombre de nucléons : $1+1=1+1+A$, d'où $A=0$; d'après la conservation du nombre de charge : $1+1=1+1+Z$, d'où $Z=0$. La particule ${}^{0}_{0}X_A$ est donc ${}^{0}_{0}\pi_0$ (rappelons qu'un pion a un nombre de nucléons $A=0$).

• Pour l'hypothèse B : ${}^{1}_{1}p + {}^{1}_{1}p \longrightarrow {}^{1}_{1}p + {}^{0}_{1}\pi^+ + {}^{A}_{Z}X_B$. On en déduira ${}^{1}_{0}X_B = n$ (neutron).

• Pour l'hypothèse C : ${}^{1}_{1}p + {}^{1}_{1}p \longrightarrow {}^{0}_{1}\pi^+ + {}^{1}_{1}p + {}^{A}_{Z}X_C$. On en déduira ${}^{1}_{0}X_C = n$ (neutron).

e) • L'énergie $E_4 = \sqrt{(p_4 c)^2 + (m_4 c^2)^2}$, $m_4 c^2 = \sqrt{E_4^2 - (p_4 c)^2}$.

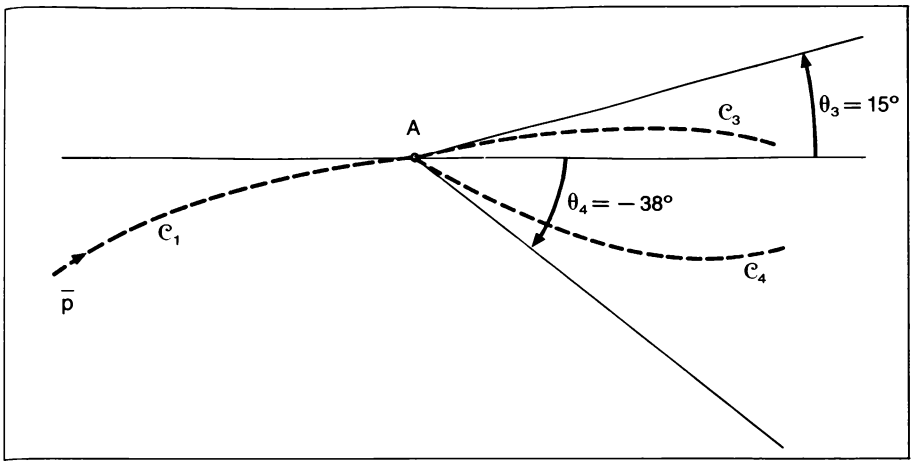
• Hypothèse A : $m_4 c^2 = \sqrt{1984^2 - 2\,147^2}$: impossible.

• Hypothèse B : $m_4 c^2 = \sqrt{2\,345^2 - 2\,147^2} = 943$ MeV.

• Hypothèse C : $m_4 c^2 = \sqrt{2\,150^2 - 2\,147^2} = 113$ MeV.

• La masse $m_4 = 943$ MeV/c^2 représente pratiquement la masse du neutron dont l'existence avait été prévue en *d*) : l'hypothèse B est donc la seule à conserver.

E 78. *(Choc inélastique antiproton-proton.)*
Dans une chambre à bulles un antiproton $\bar{p}$ *de quantité de mouvement* $p_1 = 1\,500$ MeV/c *rencontre en* A *un proton* p *initialement immobile. Des bulles marquent les trajectoires des particules possédant une charge électrique :* $\mathcal{C}_1$, *trajectoire de* $\bar{p}$ *avant le choc a un rayon* $R_1 = 270$ cm; $\mathcal{C}_3$ *et* $\mathcal{C}_4$, *trajectoire des particules chargées issues du choc, ont respectivement pour rayons* $R_3 = 150$ cm *et* $R_4 = 60$ cm; $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_3$ *et* $\mathcal{C}_4$ *sont dans un même plan, les directions respectives des tangentes en* A *sont indiquées sur la figure suivante.*



a) α) Sachant que l'antiproton est une particule de charge négative, déterminer par sa direction, son sens et son intensité, le vecteur champ magnétique supposé uniforme existant dans la chambre à bulles.

β) *Quel est le signe de la charge des particules issues du choc? (On admettra que la valeur absolue de la charge de chaque particule est égale à celle de la charge élémentaire* $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C:)

b) *Montrer que le choc antiproton-proton produit nécessairement au moins une particule* 5 *non chargée que l'on supposera être la seule ne laissant pas de trace et déterminer le module de la quantité de mouvement* p_5, *soit :*
— *par une construction soignée (à l'échelle :* 200 MeV/c *représenté par une longueur de* 1 cm);
— *par un calcul de coordonnées.*

c) *Pour vérifier la loi de conservation de l'énergie totale on envisage les deux hypothèses suivantes :*

1re hypothèse : $\bar{p} + p \longrightarrow \bar{p} + \pi^+ + n$

2e hypothèse : $\bar{p} + p \longrightarrow \bar{p} + p + \pi_0$.

Laquelle de ces deux hypothèses est la plus vraisemblable?

On donne :
masse du proton = masse antiproton = 938 MeV/c^2;
masse du méson π^+ *(ou pion +)* : 140 MeV/c^2;
masse du méson π_0 : 135 MeV/c^2;
masse du neutron : 939 MeV/c^2.

(D'après bac)

S 78. *a)* α) • Admettons que la formule de Lorentz $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ reste valable. La force magnétique centripète est dans le plan du cliché : par suite $\vec{B}$ est perpendiculaire au plan du cliché.

• Juste avant A, la force $\vec{F}$ agissant sur l'antiproton est dirigée vers le bas du cliché. Comme le trièdre $(q\vec{v}, \vec{B}, \vec{F})$ est direct, en remarquant que q est négatif, $\vec{B}$ pointe vers l'arrière du cliché.

• Le module de B est tel que $R_1 = \frac{p_1}{eB}$ d'où $B = \frac{p_1}{eR_1}$.

$p_1 = 1500 \frac{MeV}{c} = \frac{1500 \times 10^6 \times 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{3 \cdot 10^8} = 8 \cdot 10^{-19}$ kg·m·s^{-1}, par suite :

$B = \frac{8 \cdot 10^{-19}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \times 2{,}70} = 1{,}85$ T.

β) La trajectoire $\mathcal{C}_3$ s'incurve dans le même sens que la trajectoire $\mathcal{C}_1$: la particule 3 a donc une charge négative comme celle de l'antiproton incident.
La trajectoire $\mathcal{C}_4$ s'incurve en sens contraire : la particule 4 a donc une charge positive.

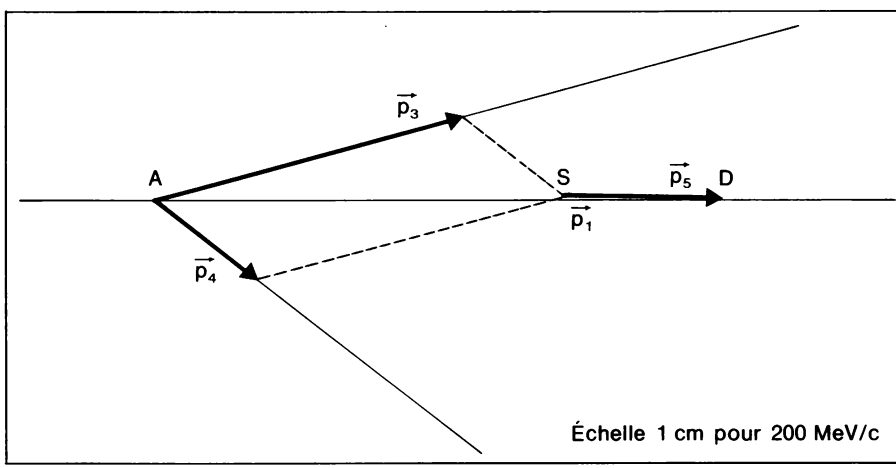
Remarque : les deux hypothèses proposées en fin d'énoncé respectent bien ces conclusions.

b)
— *Calcul des modules des quantités de mouvement* p_3 et p_4.
Les particules, l'énoncé le précise, ont des charges égales en valeur absolue à e, donc :

$$\frac{p_1}{R_1} = \frac{p_3}{R_3} = \frac{p_4}{R_4} = eB.$$

D'où $p_3 = 833$ MeV/c et $p_4 = 333$ MeV/c.

— *Résolution graphique.*



La quantité de mouvement du système avant le choc est $\vec{p_1} + \vec{p_2} = \vec{p_1}$: elle est représentée par $\overrightarrow{AD}$.
La quantité de mouvement du système après le choc est $\vec{p_3} + \vec{p_4} + \vec{p_5}$: il est nécessaire d'introduire une particule 5 car $\vec{p_3} + \vec{p_4} = \overrightarrow{AS}$ est différent de $\overrightarrow{AD}$.
Comme $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AS} + \vec{p_5}$, $\vec{p_5} = \overrightarrow{SD}$. Le représentant de $\vec{p_5}$ a une longueur voisine de 2,1 cm, compte-tenu de l'échelle : $p_5 \simeq 420$ MeV/c.

— *Résolution par le calcul* (l'énoncé ne demandait qu'une méthode, au choix).
Comme $\vec{p_5}=\vec{p_1}+\vec{p_2}-\vec{p_3}-\vec{p_4}$, vous trouverez :

$$\vec{p_5}\ \left|\begin{array}{l} 1\,500+0-833\cos 15^\circ-333\cos 38^\circ=433\ \text{MeV/c} \\ 0+0-833\sin 15^\circ-(-333\sin 38^\circ)=-11\ \text{MeV/c}. \end{array}\right.$$

D'où $p_5=\sqrt{433^2+(-11)^2}=433$ MeV/c.
(En comparant avec la méthode graphique, on constate que des erreurs de tracé et de lecture conduisent facilement à un écart d'une dizaine de MeV pour p_5 c.)

c) • L'énergie totale du système doit théoriquement se conserver :

$$E_1+E_2=E_3+E_4+E_5.$$

Rappelons qu'une particule de masse m, de quantité de mouvement p, a pour énergie totale $E=\sqrt{(pc)^2+(mc^2)^2}$.
• Énergie totale avant le choc $E_i=E_1+E_2=\sqrt{1\,500^2+938^2}+938=2\,707$ MeV.
• Énergie totale après le choc dans l'hypothèse 1 (pour p_5 nous prenons 430 MeV/c) :

$$E_f=\sqrt{833^2+938^2}+\sqrt{333^2+140^2}+\sqrt{430^2+939^2}=2\,648\ \text{MeV}.$$

L'écart est $E_f-E_i=-59$ MeV.
• Énergie totale après le choc dans l'hypothèse 2 :

$$E_f=\sqrt{833^2+938^2}+\sqrt{333^2+938^2}+\sqrt{430^2+135^2}=2\,700\ \text{MeV}.$$

L'écart est $E_f-E_i=-7$ MeV : cette deuxième hypothèse est la plus vraisemblable.

POURQUOI ?

Quelle est la différence entre mécanique newtonienne et mécanique classique?

Ce sont deux expressions synonymes.

Est-ce qu'une particule électrisée relativiste lancée dans un champ électrique uniforme a une trajectoire parabolique?

Non. Ce n'est pas parce que dans un champ magnétique uniforme une particule a une trajectoire circulaire qu'elle soit relativiste ou non, qu'il faut en conclure qu'une particule chargée lancée dans un champ électrique uniforme a une trajectoire parabolique quelle que soit sa vitesse. Méfiez-vous toujours des généralisations abusives.

Quand la masse se conserve-t-elle?

- La masse d'une particule isolée, c'est-à-dire ne subissant aucune interaction est constante quelle que soit sa vitesse.
- Lors d'un choc élastique, nous avons vu que la masse du système se conserve puisque les particules se conservent.
- Lors d'une interaction entre une particule 1 et une particule 2 (choc inélastique, réaction chimique, fusion nucléaire, fission nucléaire, ...) : ce qui se conserve c'est l'énergie totale du système mais l'énergie de masse du système, donc la masse du système, ne se conserve pas forcément. Nous y reviendrons dans le chapitre 9 à propos de la relation d'Einstein.

Y a-t-il une relation entre la variation d'énergie cinétique d'un système lors d'un choc inélastique et la variation de masse?

Oui. Considérons une interaction inélastique $P_1 + P_2 \longrightarrow P_3 + P_4 + P_5$, les lettres P désignant des particules.
D'après la conservation de l'énergie totale :

$$(E_{c_1} + m_1 c^2) + (E_{c_2} + m_2 c^2) = (E_{c_3} + m_3 c^2) + (E_{c_4} + m_4 c^2) + (E_{c_5} + m_5 c^2).$$

D'où :

$$(E_{c_1} + E_{c_2}) - (E_{c_3} + E_{c_4} + E_{c_5}) = (m_3 + m_4 + m_5 - m_1 - m_2) c^2$$

$$-\Delta E_c = \Delta m \cdot c^2.$$

Ainsi si $\Delta E_c = 150$ MeV; $\Delta m = -150$ MeV/c^2.

Les unités de masse MeV/c^2 *et de quantité de mouvement* MeV/c *sont-elles de véritables rapports ou des écritures conventionnelles?*

Ce sont de véritables rapports.

Ainsi dire que $m = 140$ MeV/c^2 s'écrit aussi $m = 140 \dfrac{\text{MeV}}{c^2}$, soit en multipliant par c^2 : $mc^2 = 140$ MeV.

Ainsi pour convertir $m = 140\ MeV/c^2$ en kg, on écrit :

$$m = 140\ \frac{MeV}{c^2} = \frac{140 \times 10^6 \times 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{(3 \cdot 10^8)^2} = 2{,}49 \cdot 10^{-28}\ kg.$$

Lorsqu'on écrit le bilan d'un choc : $p + p \longrightarrow \pi^+ + p + n$, *quelles sont les conventions?*

Avant la flèche figurent les particules initiales : en première position la particule projectile (ou particule incidente), en deuxième position la particule cible.
Après la flèche sont notées les particules finales dans le même ordre que celui utilisé pour numéroter les trajectoires après le choc.

7 LE PHOTON

E 79. a) *Considérons l'élément césium* Cs. *On relève dans les tables :*
— *travail d'extraction* W_0 *(ou énergie d'extraction) :* 1,9 eV;
— *énergie d'ionisation* E_i : 3,9 eV.
Qu'est-ce que cela signifie?

b) *Un faisceau lumineux monochromatique peut être considéré :*
— *comme une succession de trains d'ondes électromagnétiques de fréquence* $\nu = 5{,}1 \cdot 10^{14}$ Hz;
— *comme un flux de photons.*

α) *Quelle est la longueur d'onde dans le vide du faisceau?*

β) *Quelles sont les caractéristiques de ses photons : masse, charge électrique, énergie, vitesse? La constante de Planck* $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s.

γ) *Combien le faisceau véhicule-t-il de photons par seconde sachant que sa puissance* $\mathcal{P} = 4 \cdot 10^{-5}$ W?

c) *Le faisceau précédent frappe une plaque de métal césium, peut-il y avoir effet photoélectrique?*

d) *Le faisceau précédent frappe une plaque de métal zinc dont le travail d'extraction est* $W_0' = 3{,}4$ eV. *Peut-il y avoir effet photo-électrique?*

89 Condition d'existence de l'effet photoélectrique (ou photoélectronique).

• *Électron libre d'un métal.*
Un métal, dans un modèle simple, peut être considéré comme un réseau d'ions positifs disposés régulièrement, baigné par une « mer » d'électrons libres. Les électrons libres peuvent se déplacer à l'intérieur du métal (ce sont les porteurs de charge des courants électriques dans les métaux). Pour extraire un électron libre du métal, il faut lui fournir un travail (ou une énergie) W_0 appelé travail d'extraction (ou énergie d'extraction). W_0 dépend du métal considéré.

• *Les photons.*
Un rayonnement électromagnétique monochromatique de fréquence ν, de longueur d'onde dans le vide $\lambda = \frac{c}{\nu}$, est constitué d'un flux de photons identiques.
Chaque photon est une particule relativiste :
— de masse nulle;
— de charge électrique nulle;
— se déplaçant dans le vide à la vitesse $c = 3 \cdot 10^8$ m·s^{-1};

— d'énergie $E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$ (h étant la constante de Planck, dont la valeur, à ne pas mémoriser, est $6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s).

• On dit qu'il y a effet photoélectrique si à la suite d'une interaction entre un seul photon et un seul électron libre, le photon disparaît et l'électron libre est expulsé du métal.

• Un photon ne peut extraire un électron libre que s'il apporte une énergie supérieure ou égale au travail d'extraction W_0. La condition nécessaire pour qu'il y ait effet photoélectronique est :

$$h\nu \geqslant W_0.$$

On appelle fréquence du seuil photoélectronique pour le métal considéré :

$$\nu_0 = \frac{W_0}{h}.$$

La condition nécessaire d'existence de l'effet photoélectronique peut donc aussi s'écrire :

$$\nu \geqslant \nu_0 \quad \text{ou bien} \quad \lambda \leqslant \lambda_0$$

(λ_0 est la longueur d'onde du seuil photoélectronique pour le métal considéré).

S 79. *a*) • Le travail d'extraction W_0 correspond à l'énergie qu'il faut fournir à un électron libre du métal césium pour le faire sortir du métal.
L'énergie d'ionisation E_i correspond à l'énergie qu'il faut fournir à un électron de valence appartenant à un atome isolé césium (par exemple apporté par de la vapeur de césium) pour l'arracher de l'atome et créé ainsi un ion césium Cs^+.
Le travail d'extraction W_0 est inférieur à l'énergie d'ionisation E_i car dans le métal les électrons libres sont moins liés que les électrons de valence dans les atomes isolés.

b) α) • La longueur d'onde dans le vide de la radiation électromagnétique de fréquence ν est $\lambda = \frac{c}{\nu}$ (c : célérité de la lumière dans le vide, dont la valeur à connaître est $3 \cdot 10^8$ m·s^{-1}). Dans l'air, la longueur d'onde est très voisine.

• Numériquement $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{5{,}1 \cdot 10^{14}} = 5{,}88 \cdot 10^{-7}$ m = 0,588 µm. (Cette radiation est visible, il est bon de savoir que les radiations visibles ont des longueurs d'onde dans le vide comprises, grossièrement, entre 0,4 µm et 0,8 µm.)

β) • Le photon est une particule élémentaire de masse nulle, de charge électrique nulle, d'énergie $E = h\nu$, se déplaçant à la vitesse c dans le vide.

• Numériquement $E = h\nu = 6{,}62 \cdot 10^{-34} \times 5{,}1 \cdot 10^{14} = 3{,}38 \cdot 10^{-19}$ J = 2,11 eV (pour électronvolt, revoir ℳ 25).

γ) Soit n' le nombre de photons traversant une section du faisceau en une seconde. La puissance $\mathcal{P}$ du faisceau lumineux est égale à l'énergie transportée en une seconde : $\mathcal{P} = n'h\nu$.

D'où $n' = \frac{\mathcal{P}}{h\nu} = 1{,}18 \cdot 10^{14}$ photons par seconde.

c) • Chaque photon a pour énergie $E = 2{,}11$ eV, cette énergie est supérieure au travail d'extraction $W_0 = 1{,}9$ eV : certains photons pourront extraire des électrons libres du métal césium, on observera donc l'effet photoélectrique.

d) • Chaque photon a une énergie $E = 2{,}11$ eV inférieure au travail d'extraction $W_0' = 3{,}4$ eV du métal zinc : on n'observera pas l'effet photoélectronique. (Insistons sur le fait que les photons ne peuvent pas s'unir à plusieurs pour extraire un électron : l'effet photoélectronique résulte d'un acte individuel faisant intervenir un seul photon.)

E 80. *Un rayonnement ultraviolet de longueur d'onde dans le vide* $\lambda = 350$ nm *frappe une plaque de potassium. La longueur d'onde du seuil photoélectronique du potassium est* $\lambda_0 = 540$ nm.

a) *Peut-on observer l'effet photoélectronique?*

b) *Quel est le travail d'extraction* W_0 *du métal potassium?*

c) *Pourquoi les électrons extraits ne sortent-ils pas tous à la même vitesse? Quelle est leur énergie cinétique maximale de sortie* $E_{C,m}$? *Quelle est la vitesse de sortie maximale correspondante?*

Données :
constante de Planck $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s;
masse d'un électron $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

S 80. *a*) La longueur d'onde λ du rayonnement est inférieure à la longueur d'onde λ_0 du seuil photoélectronique du potassium : on peut donc observer l'effet photoélectronique.

b) Dire que λ_0 est la longueur d'onde du seuil photoélectronique signifie que les photons véhiculés par un rayonnement électromagnétique de longueur d'onde λ_0 ont une énergie juste égale au travail d'extraction W_0 :

$$h\frac{c}{\lambda_0} = W_0.$$

Numériquement $W_0 = \dfrac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8}{540 \cdot 10^{-9}} = 3{,}68 \cdot 10^{-19}\ \text{J} \simeq 2{,}3\ \text{eV}.$

c) • Lors d'une interaction entre un photon et un électron libre, le photon cède toute son énergie E (et disparaît donc). Une partie, W_0, de cette énergie sert à extraire l'électron, l'autre partie est cédée à l'électron qui acquiert ainsi initialement l'énergie cinétique $E - W_0$. Mais avant de sortir du métal l'électron, lors de chocs sur les autres particules du métal, perd une partie plus ou moins importante de cette énergie cinétique.
Finalement à la sortie du métal son énergie cinétique de sortie est :

$$E_C \leqslant E - W_0.$$

Les électrons ne sortent donc pas tous à la même vitesse.

• Dans les meilleures conditions de sortie possible (pas de perte d'énergie de l'électron lors des chocs) l'énergie cinétique de sortie a la valeur maximale :

$$E_{C,m} = E - W_0.$$

Soit $$E_{C,m} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_0} = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right) \simeq 2 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

• L'électron qui sort avec l'énergie cinétique maximale $E_{C,m}$ n'est pas relativiste, c'est-à-dire que les lois de la mécanique newtonienne lui sont applicables. En particulier son énergie cinétique a pour expression $E_{C,m} = \frac{1}{2} m v_m^2$.

D'où $v_m = \sqrt{\frac{2E_{C,m}}{m}} = 6{,}63 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. (On constate que v_m est très inférieur à c, cela confirme bien la validité de la mécanique newtonienne.)

E 81. *On éclaire une plaque de magnésium* C *à l'aide d'une source* S *émettant un rayonnement électromagnétique monochromatique de fréquence* $\nu = 9 \cdot 10^{14}$ Hz.

a) *Le travail d'extraction (ou de sortie) du magnésium est* $W_0 = 2{,}9$ eV. *Quelle est la fréquence du seuil photoélectronique* ν_0? *Observe-t-on, avec* S, *l'effet photoélectronique?* $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s.

b) *Quelle est l'énergie cinétique maximale de sortie des électrons de* C?

c) *La plaque* C *reçoit de* S *la puissance* $\mathcal{P}_1 = 3 \cdot 10^{-6}$ W.

α) *Quel est le nombre* n_1' *de photons reçus par seconde par* C?

β) *On constate que* C *émet* $n_1 = 3 \cdot 10^{10}$ *électrons par seconde. Quel est le rendement quantique* $\frac{n_1}{n_1'}$?

d) *La plaque* C *est maintenant placée plus loin de* S, *elle ne reçoit plus que la puissance* $\mathcal{P}_2 = \frac{\mathcal{P}_1}{2}$. *L'énergie cinétique maximale de sortie change-t-elle? Le nombre d'électrons émis par seconde par* C *change-t-il?*

S 81. *a)* • La fréquence seuil ν_0 correspond à la fréquence du rayonnement électromagnétique dont les photons auraient juste l'énergie W_0 :

$$h\nu_0 = W_0 \quad \text{d'où} \quad \nu_0 = \frac{W_0}{h} = \frac{2{,}9 \times 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{6{,}62 \cdot 10^{-34}} = 7 \cdot 10^{14} \text{ Hz}.$$

• La fréquence du rayonnement émis par S, $\nu = 9 \cdot 10^{14}$ Hz, est supérieure à la fréquence seuil ν_0 : on observe donc l'effet photoélectronique.

b) Lors d'une interaction entre un photon et un électron, le photon cède toute son énergie E; une partie, W_0, de cette énergie sert à extraire l'électron; l'autre partie $E_{C,m} = E - W_0$ est cédée à l'électron; dans le cas idéal où l'électron ne perd pas d'énergie cinétique lors des chocs précédant sa sortie du métal, son énergie cinétique reste égale à $E_{C,m} = E - W_0 = h\nu - h\nu_0$.
Numériquement :

$$E_{C,m} = h(\nu - \nu_0) = 6{,}62 \cdot 10^{-34}(9 \cdot 10^{14} - 7 \cdot 10^{14}) = 1{,}32 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

c) α) Chaque photon transporte l'énergie $E = h\nu$. En une seconde l'énergie arrivant sur C est $\mathcal{P}_1 = n'_1 h\nu$. D'où $n'_1 = \dfrac{\mathcal{P}_1}{h\nu} \simeq 5 \cdot 10^{12}$ photons par seconde.

β) Le rendement quantique est $\dfrac{n_1}{n'_1} = \dfrac{3 \cdot 10^{10}}{5 \cdot 10^{12}} = 0{,}006 = 0{,}6\,\%$.

Cela signifie que 6 photons sur 1 000 arrachent un électron au métal, on dit qu'il y a 6 chocs efficaces sur 1 000, ou 6 photons utiles sur 1 000.

Note : On comprend pourquoi, dans *M* 89, nous avons dit que $h\nu \geqslant W_0$ est une condition nécessaire pour qu'il y ait effet photoélectronique. Cette condition satisfaite n'entraîne pas forcément l'extraction d'un électron par un photon.

d) • L'énergie cinétique maximale de sortie des électrons, pour un métal donné, ne dépend que de l'énergie de chaque photon, donc ne dépend que de la fréquence du rayonnement électromagnétique. Dans cette expérience, ν ne change pas, $E_{C,\,m}$ ne change pas.

• Lorsque la puissance est divisée par 2, on divise par 2 le nombre de photons arrivant sur C chaque seconde. Si on admet que le rendement quantique reste le même, il y aura extraction de deux fois moins d'électrons par seconde.

M **90** **Quelques renseignements sur les chocs photon-métal.**

Récapitulons des résultats dégagés dans les exercices précédents :

— *Rendement quantique.* Un photon d'énergie $h\nu \geqslant W_0$ n'arrache pas forcément un électron au métal. Sur les n' photons par seconde qui frappent le métal, n donnent des chocs efficaces, ce sont les « photons utiles ». Le rendement quantique $\dfrac{n}{n'}$ est en général faible. On peut le considérer comme constant pour un métal et une fréquence de rayonnement donnés.

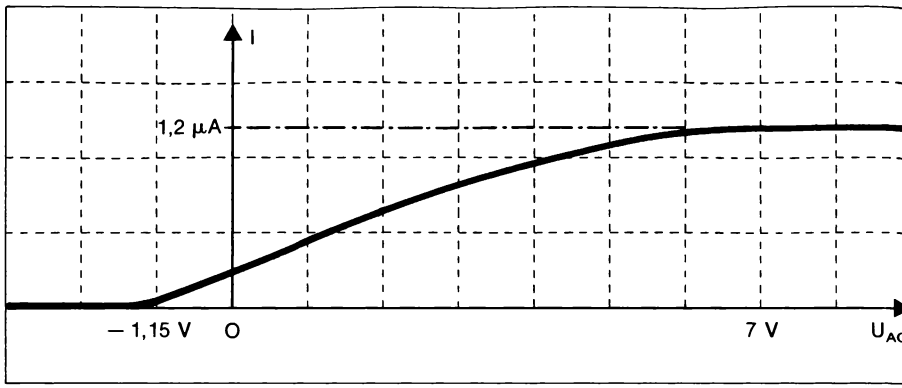
— *Étude d'un choc efficace.*

Le photon cède son énergie à l'électron. Une partie de cette énergie, W_0, sert à extraire l'électron. L'autre partie $E - W_0$, est communiquée sous forme d'énergie cinétique à l'électron. Dans les meilleures conditions possibles, l'électron garde cette énergie cinétique jusqu'à sa sortie du métal, il est alors éjecté avec *l'énergie cinétique maximale.*

$$E_{C,\,m} = h(\nu - \nu_0) = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right).$$

E 82. *Une cellule photoélectrique au césium est éclairée par une radiation électromagnétique monochromatique de longueur d'onde* $\lambda = 410$ nm. *On établit entre son anode* A *et sa cathode* C *une tension* U_{AC} *et on note l'intensité* I *du courant pour chaque valeur de* U_{AC}.

La courbe de la figure ci-dessous reproduit la caractéristique $I = f(U_{AC})$ *de la cellule ainsi éclairée, lorsque la puissance qu'elle reçoit est* $\mathcal{P} = 300\ \mu W$.



a) *Faire un schéma de la cellule lorsque* $U_{AC} > 0$. *Quels sont les porteurs de charge dans la cellule? Indiquer le sens du courant.*

b) *Si* $U_{AC} \leqslant -U_0 = -1{,}15$ V, $I = 0$. *Le nombre positif* U_0 *s'appelle le potentiel d'arrêt de la cellule pour la longueur d'onde* λ.
A partir de U_0 *évaluer :*

α) *l'énergie cinétique maximale avec laquelle les électrons quittent la plaque de césium* C,

β) *l'énergie* W_0 *nécessaire pour extraire un électron du métal césium.*

γ) *la longueur d'onde de seuil photoélectrique du césium.*

c) *Pour* $U_{AC} = 6$ V, *à quelle vitesse maximale les électrons arrivent-ils sur l'anode* A?

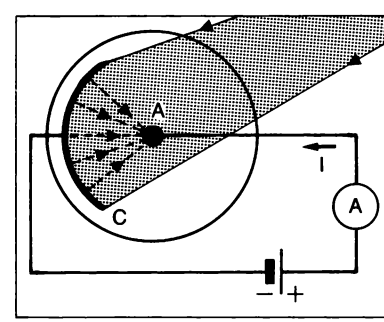
d) *A partir de* $U_{AC} = 8$ V *environ, l'intensité devient constante, égale à l'intensité de saturation* $I_S = 1{,}2$ μA.

α) *Quel est alors le nombre d'électrons reçus chaque seconde par* A?

β) *Quel est le rendement quantique de la cellule pour cette longueur d'onde?*
Données : constante de Planck $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s;
masse d'un électron $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

(D'après bac)

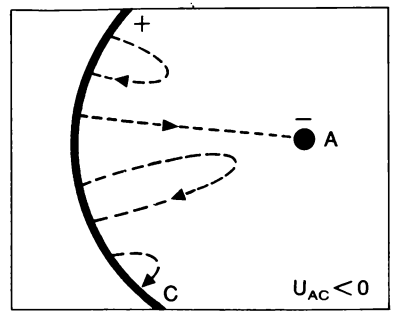
S 82. *a*) • La cellule photoélectrique est un tube vidé d'air comportant :
— une plaque photoémissive C de surface assez grande de façon à capter les radiations;
— un fil A destiné à collecter les électrons émis par C.
• Le générateur maintient dans le montage ci-contre une tension $U_{AC} > 0$ entre l'anode A et la cathode C.
• Les porteurs de charge dans la cellule sont les électrons extraits de C par effet photoélectronique : ces électrons ne peuvent traverser la cellule que dans le sens C vers A.



• Le courant a un sens conventionnel contraire à celui des électrons, il traverse toujours la cellule de A vers C.

b) α) • Si $U_{AC} < -U_0$ alors $I = 0$. Le rayonnement qui arrive sur C continue à produire l'effet photoélectronique c'est-à-dire à extraire des électrons de C. Mais la décélération imposée par $V_A - V_C < 0$ fait que tous les électrons émis par C rebroussent chemin avant d'arriver en A.

• Pour $U_{AC} = -U_0$, seuls les électrons partant de C avec l'énergie cinétique maximale $E_{C,m}$ arrivent « de justesse » en A, c'est-à-dire arrivent en A à vitesse nulle. Tous les autres rebroussent chemin.



• Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à l'un de ces électrons émis de C à vitesse maximale :

$$E_{C,A} - E_{C,C} = W_{\vec{P}} + W_{\vec{F}}$$

D'une part $E_{C,A} = 0$ et $E_{C,C} = E_{C,m}$; d'autre part $W_{\vec{P}}$ est négligeable devant $W_{\vec{F}}$ qui est égal à $-e(V_C - V_A)$.

D'où $\quad 0 - E_{C,m} = -e(V_C - V_A) = e(V_A - V_C) = e(-U_0)$.

Par suite $\quad E_{C,m} = eU_0$.

• Application numérique : $E_{C,m} = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \times 1{,}15 = 1{,}84 \cdot 10^{-19}$ J.

Remarquons, qu'en électronvolt $E_{C,m} = \dfrac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \times 1{,}15}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 1{,}15$ eV :

$$E_{C,m} = U_0 \text{ eV}.$$

β) Un photon d'énergie $E = h\dfrac{c}{\lambda}$ cède toute son énergie lors d'un choc efficace (revoir ℳ 90). Une partie de cette énergie, W_0, sert à extraire l'électron. Dans les meilleures conditions possibles, l'électron sort du métal avec l'énergie cinétique maximale $E_{C,m}$ égale au reste d'énergie disponible $E - W_0$, d'où :

$$E_{C,m} = \frac{hc}{\lambda} - W_0.$$

D'où

$$W_0 = \frac{hc}{\lambda} - E_{C,m}.$$

Numériquement : $W_0 = \dfrac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8}{410 \cdot 10^{-9}} - 1{,}84 \cdot 10^{-19} = 3 \cdot 10^{-19}$ J.

γ) La longueur d'onde λ_0 du seuil photoélectronique correspond à un rayonnement dont les photons auraient juste l'énergie W_0 :

$$h\frac{c}{\lambda_0} = W_0, \text{ d'où } \lambda_0 = \frac{hc}{W_0} = 6{,}62 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 662 \text{ nm}.$$

c) • Les électrons qui arrivent en A à vitesse maximale sont ceux qui partaient de C avec l'énergie cinétique maximale.

• Appliquons à l'un de ces électrons le théorème de l'énergie cinétique :

$$E_{C,A} - E_{C,C} = W_{\vec{P}} + W_{\vec{F}}$$

D'où $$\frac{1}{2} m v_A^2 - E_{C,m} = -e(V_C - V_A) = e(V_A - V_C) = eU_{AC}. \quad (1)$$

Par suite $v_A = \sqrt{\frac{2(E_{C,m} + eU_{AC})}{m}} = 1{,}58 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (cette vitesse est inférieure à $\frac{c}{10}$: l'expression $\frac{1}{2} m v_A^2$ convient pour $E_{C,A}$).

• *Remarque.* Comme $E_{C,m} = eU_0$, on peut modifier l'expression (1) :

$$\frac{1}{2} m v_A^2 - e U_0 = eU_{AC},$$

d'où $$\frac{1}{2} m v_A^2 = e(U_0 + U_{AC})$$

et $$v_A = \sqrt{\frac{2e}{m}(U_0 + U_{AC})}.$$

d) α) Soit n le nombre d'électrons qui arrivent en A par seconde, chaque électron transporte la quantité d'électricité e, la quantité d'électricité transportée en une seconde n'est autre que l'intensité du courant : $I = ne$.

En particulier lorsque $I = I_s$, $n = \frac{I_s}{e} = \frac{1{,}2 \cdot 10^6}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 7{,}5 \cdot 10^{12}$ électrons par seconde.

β) Lorsque la cellule est réglée à la saturation, tous les électrons émis par C arrivent en A. La cathode C émet donc $n = 7{,}5 \cdot 10^{12}$ électrons par seconde.

Cette cathode reçoit chaque seconde $n' = \frac{\mathcal{P}}{h\frac{c}{\lambda}} = \frac{\mathcal{P}\lambda}{hc} = 6{,}19 \cdot 10^{14}$ photons. Le rendement quantique est égal au rapport entre le nombre d'électrons émis par seconde et le nombre de photons reçus par la cathode par seconde : ce rendement est $\frac{n}{n'} = \frac{7{,}5 \cdot 10^{12}}{6{,}19 \cdot 10^{14}} = 1{,}2 \cdot 10^{-2} = 1{,}2\,\%$.

E 83. *Soit une cellule photoélectrique dont la cathode est en césium. L'énergie d'extraction d'un électron du métal césium est* $W_0 = 1{,}88$ eV. *On éclaire la cathode avec une radiation monochromatique de longueur d'onde* $\lambda = 0{,}496$ µm.

a) α) *Cette radiation peut-elle produire l'effet photoélectrique? Justifier la réponse.*

β) *Calculer l'énergie cinétique maximale des électrons à la sortie du métal, ainsi que leur vitesse.*

γ) *Expliquer la signification du terme «potentiel d'arrêt». Calculer sa valeur dans ce cas.*

b) *Soit* $\mathcal{P}$ *la puissance du rayonnement incident, soit* r *le rendement quantique de cette cellule (c'est-à-dire le rapport du nombre d'électrons émis au nombre de photons reçus pendant le même intervalle de temps).*

α) *Exprimer littéralement l'intensité du courant de saturation en fonction de* $\mathcal{P}$, λ, ...

β) *Calculer numériquement cette intensité avec les données suivantes :* $\mathcal{P} = 40\ \mu W$, $r = 0{,}01$.

On rappelle les valeurs suivantes :

constante de Planck $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s;

masse de l'électron $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg.

(D'après bac)

S 83. *a*) α) Un photon, d'énergie $E = h\dfrac{c}{\lambda}$, ne peut extraire un électron que s'il apporte une énergie supérieure ou égale au travail d'extraction W_0. Par suite $\dfrac{hc}{\lambda} \geqslant W_0$, soit $\lambda \leqslant \dfrac{hc}{W_0} = \lambda_0$.

Évaluons λ_0 pour le césium :

$$\lambda_0 = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8}{1{,}88 \times 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 6{,}60 \cdot 10^{-7}\ m = 0{,}660\ \mu m.$$

La radiation utilisée de longueur d'onde $\lambda = 0{,}496\ \mu m$ inférieure à λ_0, peut donc produire l'effet photoélectronique.

β) Réponses :

$$E_{C,\,m} = E - W_0 = \frac{hc}{\lambda} - W_0 = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8}{0{,}496 \cdot 10^{-6}} - 1{,}88 \times 1{,}6 \cdot 10^{-19}$$

$$= 9{,}96 \cdot 10^{-20}\ J.$$

$$v_m = \sqrt{\frac{2E_{C,\,m}}{m}} = 4{,}68 \cdot 10^5\ m \cdot s^{-1}.$$

γ) • Soit C la plaque photoémissive en césium, A l'électrode opposée à C. Pour arrêter tous les électrons émis par C, il faut que la différence de potentiel $V_A - V_C$ soit négative (en d'autres termes que A soit polarisée — et C polarisée +).

La tension négative $V_A - V_C$ maximale qui arrête tous les électrons a pour valeur absolue U_0, cette valeur U_0 s'appelle le potentiel d'arrêt.

• Lorsque la cellule est réglée au potentiel d'arrêt, c'est-à-dire lorsque $V_A - V_C = -U_0$, les électrons les plus rapides à la sortie de C arrivent « en mourant » en A, c'est-à-dire à vitesse nulle. Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à l'un de ces électrons entre C et A :

$$0 - E_{C,\,m} = -e(V_C - V_A) = e(V_A - V_C) = -eU_0$$

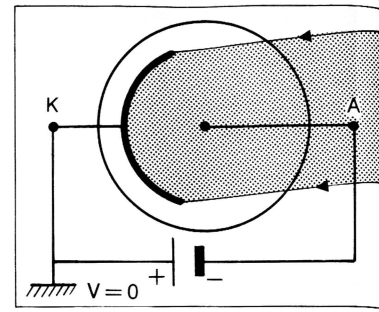
d'où $$E_{C,\,m} = eU_0$$

et $$U_0 = \frac{E_{C,\,m}}{e} = \frac{9{,}96 \cdot 10^{-20}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 0{,}62\ V.$$

b) α) Réponse : $I_s = ne = rn'e = \dfrac{r\mathcal{P}e\lambda}{hc}$.

β) $I_s = 1{,}6 \cdot 10^{-7}\ A = 0{,}16\ \mu A$.

E 84. *Branchée, comme l'indique la figure, à une source de tension variable, une cellule photoélectrique est éclairée successivement par 6 radiations lumineuses monochromatiques dont les fréquences sont indiquées dans le tableau ci-dessous. Le potentiel de la plaque photoémissive* K *est maintenu constamment nul* ($V_K = 0$).



a) Pour chaque radiation on constate le passage d'un courant pour $V_A = 0$.
Que peut-on en déduire?

b) *Pour annuler ce courant il faut donner à* V_A *une valeur suffisamment négative* $V_{A,0}$ *dont la valeur absolue* $|V_{A,0}|$ *est appelée potentiel d'arrêt.*

$\nu \times 10^{14}$ *en* Hz	5,2	5,5	5,7	5,8	6,1	6,3
$\lvert V_{A,0}\rvert$ *en* V	0,29	0,41	0,50	0,54	0,67	0,75

α) *Tracer la courbe représentant les variations de* $|V_{A,0}|$ *en fonction de* ν.
Déterminer à partir de ce graphique l'équation $|V_{A,0}| = f(\nu)$.

β) *En déduire la fréquence seuil* ν_0 *de la cellule.*

c) α) *Établir la relation entre le potentiel d'arrêt, la fréquence* ν, *la fréquence seuil* ν_0, *la constante de Planck* h *et la charge élémentaire* e.

β) *En utilisant les résultats du* b), *en déduire la constante de Planck* h.

d) *Quel est le sens du courant lorsque la cellule est réglée à un potentiel négatif* V_A *un peu supérieur à* $V_{A,0}$? *Quel est le dipôle qui joue alors le rôle de générateur dans le circuit?*

(D'après bac)

S 84. *a*) Cette question peu précise peut amener diverses réponses :
— On peut en déduire, puisqu'il y a un courant électrique pour les 6 radiations lumineuses utilisées successivement, que ces 6 radiations donnent l'effet photoélectronique, donc que leur fréquence ν est supérieure à la fréquence seuil ν_0 (il faut rejeter $\nu = \nu_0$, car dans ce cas les électrons partant de K sans vitesse initiale ne pourraient atteindre A).
— On peut en déduire que la cellule commandée par la radiation électromagnétique se comporte comme un générateur électrique débitant un courant qui traverse la cellule de A vers K (pensez aux électrons dans la cellule : ils vont toujours de K vers A), le générateur équivalent a donc pour pôle + K, pour pôle — A.

b) *α*) Les points de coordonnées $(\nu; |V_{A,0}|)$ s'alignent aux erreurs de mesures et de tracé près. Par suite le potentiel d'arrêt $|V_{A,0}|$ est fonction affine de ν : $|V_{A,0}| = a\nu + b$.

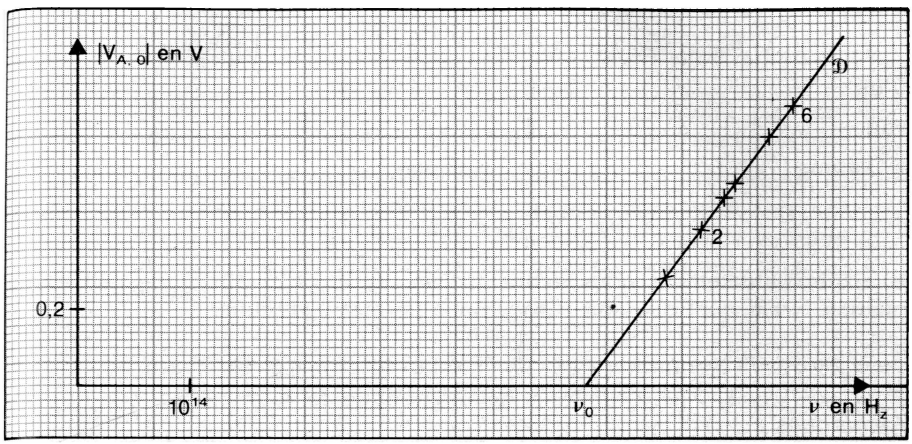
Considérons deux points appartenant à la droite $\mathcal{D}$, par exemple les points 2 et 6. Leurs coordonnées vérifient la fonction affine $|V_{A,0}| = a\nu + b$, d'où :

$$\begin{cases} 0{,}41 = a \times 5{,}5 \cdot 10^{14} + b \\ 0{,}75 = a \times 6{,}3 \cdot 10^{14} + b. \end{cases}$$

par soustraction $0{,}75 - 0{,}41 = a(6{,}3 \cdot 10^{14} - 5{,}5 \cdot 10^{14})$, d'où $a = 4{,}25 \cdot 10^{-15}$ en unités S.I. $\left(\text{plus précisément en } \frac{V}{s^{-1}} = V \cdot s\right)$.

En remplaçant, on obtient $b = -1{,}93$ V.

D'où la fonction affine $|V_{A,0}| = 4{,}25 \cdot 10^{-15}\,\nu - 1{,}93$ en unités S.I.



β) • Lorsqu'on éclaire la cellule avec une radiation de fréquence égale à la fréquence seuil ν_0, les électrons sortent à vitesse nulle de K (car l'énergie d'un photon est alors juste égale à l'énergie d'extraction W_0). Pour que les électrons arrivent en A, il faut obligatoirement qu'ils soient attirés par A : V_A doit être positif. Par conséquent la cellule est bloquée pour $V_A = 0$: le potentiel d'arrêt pour ν_0 est donc $|V_{A,0}| = 0$.

• Déterminons ν_0 :

— sur le graphique ν_0 (point de $\mathcal{D}$, d'ordonnée nulle) est représenté par 67 mm. Comme 10^{14} Hz est représenté par 15 mm, $\nu_0 = \frac{67}{15} \times 10^{14} = 4{,}47 \cdot 10^{14}$ Hz;

— d'après la fonction affine $0 = 4{,}25 \cdot 10^{-15}\,\nu_0 - 1{,}93$, d'où $\nu_0 = 4{,}54 \cdot 10^{14}$ Hz;

— le résultat peut donc être limité à 2 chiffres significatifs : $\nu_0 = 4{,}5 \cdot 10^{14}$ Hz.

c) α) • Présentation de la démarche : en étudiant un choc efficace photon-électron s'effectuant dans les meilleures conditions d'extraction possibles on en déduira l'énergie cinétique maximale de sortie des électrons de la cathode; en étudiant la cellule polarisée au potentiel d'arrêt on en déduira la relation entre ce potentiel d'arrêt et la fréquence du rayonnement électromagnétique utilisé.

• Lorsqu'un « photon utile » interagit avec un électron une partie de son énergie, W_0, sert à extraire l'électron, l'autre partie $h\nu - W_0$ est communiquée sous forme d'énergie cinétique à l'électron, dans les meilleures conditions (pas d'énergie perdue lors des chocs) l'électron garde cette énergie jusqu'à sa sortie du métal. Il part alors avec la plus grande énergie cinétique possible $E_{C,m} = h\nu - W_0$.

La fréquence seuil ν_0 correspond à un rayonnement dont les photons ont juste l'énergie W_0, donc $W_0 = h\nu_0$.

Par suite $$E_{C,m} = h(\nu - \nu_0). \qquad (1)$$

Note : vous remarquerez que nous évitons de « sortir » la formule de ℳ 90 par cœur, il est en effet fortement conseillé dans les exercices sur l'effet photoélectronique de rejustifier en quelques lignes les résultats nécessaires.

• Lorsque la cellule est réglée de façon que $V_A - V_K = -|V_{A,0}|$, seuls les électrons partant de K avec l'énergie cinétique maximale $E_{C,m}$ arrivent en A à vitesse $v_A = 0$. D'après le théorème de l'énergie cinétique appliqué entre K et A à l'un de ces électrons :

$$E_{C,A} - E_{C,K} = -e(V_K - V_A) = e(V_A - V_K) = -e|V_{A,0}|.$$

D'où $$0 - E_{C,m} = -e|V_{A,0}|,$$

soit $$E_{C,m} = e|V_{A,0}|. \qquad (2)$$

• D'après (1) et (2) $$h(\nu - \nu_0) = e|V_{A,0}|$$

soit $$|V_{A,0}| = \frac{h}{e}(\nu - \nu_0) = \frac{h}{e}\nu - \frac{h}{e}\nu_0. \qquad (3)$$

β) Expérimentalement nous avons trouvé $|V_{A,0}| = 4{,}25 \cdot 10^{-15}\,\nu - 1{,}93$. Cette relation, vraie quel que soit $\nu \geqslant \nu_0$, nous permet d'identifier :

$\frac{h}{e} = 4{,}25 \cdot 10^{-15}$ d'où $h = 4{,}25 \cdot 10^{-15} \times 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 6{,}8 \cdot 10^{-34}$ J·s.

Remarques :

— la valeur précise de h est voisine de $6{,}6 \cdot 10^{-34}$ J·s, il y a donc une imprécision de l'ordre de $\frac{0{,}2}{6{,}6} \times 100 = 3\,\%$;

— on pourrait retrouver ν_0 en écrivant que $\frac{h}{e}\nu_0 = 1{,}93$, on retrouverait, en prenant pour h la valeur expérimentale, $\nu_0 = 4{,}54 \cdot 10^{14}$ Hz.

d) • Les porteurs de charge dans la cellule à vide sont les électrons extraits par effet photoélectronique de K : ils vont de K vers A à travers la cellule. Le courant a donc le sens A vers K dans la cellule.

• Le courant sort (voir le circuit schématisé dans E 84) de la cellule par K, il entre donc par le pôle + de l'alimentation continue : c'est la cellule qui joue le rôle de générateur dans le circuit, l'alimentation en opposition joue le rôle de récepteur. (Rappelons que ceci est valable pour $-|V_{A,0}| < V_A < 0$.)

ℳ 91 **Quelques propriétés d'une cellule photoélectrique.**

Récapitulons les résultats dégagés lors de l'étude de cellules photoélectriques à vide.

• **Sens du courant.** Soit C la couche photoémissive et A l'électrode chargée de capter les électrons. Le courant s'il existe (c'est-à-dire si la radiation produit l'effet photoélectronique et si U_{AC} n'est pas trop négatif), ne peut traverser la cellule que de A vers C (les électrons la traversant obligatoirement de C vers A).

• **Potentiel d'arrêt.**

Si $U_{AC} < -U_0$, l'intensité du courant $I = 0$.

Pour $U_{AC} = -U_0$ (U_0 s'appelle le potentiel d'arrêt), seuls les

électrons partant de C avec l'énergie cinétique maximale $E_{C,m}$ arrivent en A à vitesse nulle.
En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'un de ces électrons, on aboutit à :

$$E_{C,m} = eU_0.$$

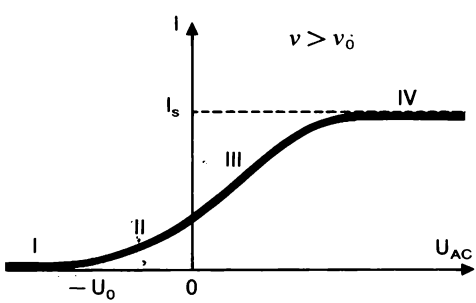
Comme $E_{C,m} = h(\nu - \nu_0)$ (voir ℳ 90), il s'ensuit $U_0 = \frac{h}{e}(\nu - \nu_0)$: le potentiel d'arrêt est fonction affine croissante de la fréquence ν.
Remarquons que le potentiel d'arrêt ne dépend pas de la puissance rayonnante $\mathcal{P}$ reçue par la couche photoémissive.

• **Intensité de saturation.** Lorsque $U_{AC} > -U_0$, I augmente avec U_{AC} jusqu'à une certaine limite I_s, appelée intensité de saturation. A la saturation le nombre n d'électrons émis par la cathode C pendant une seconde est égal au nombre d'électrons reçus par A en une seconde :

$$n = \frac{I_s}{e}.$$

A partir de n et du nombre de photons $n' = \frac{\mathcal{P}}{h\nu}$ reçus par la cathode chaque seconde, on peut en déduire le rendement quantique $\frac{n}{n'}$.

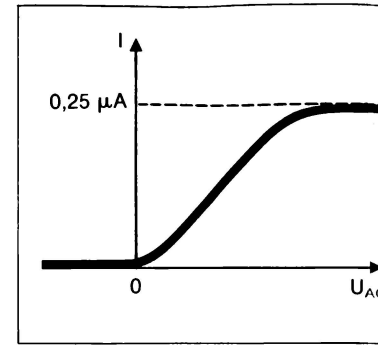
• **Caractéristique d'une cellule** pour un rayonnement monochromatique de fréquence $\nu > \nu_0$.



I : il y a effet photoélectronique mais les électrons trop freinés reviennent tous vers A.
II : les électrons sont encore freinés, mais certains arrivent en A.
III : les électrons sont accélérés, le nombre d'électrons captés par seconde augmente avec U_{AC}.
IV : tous les électrons émis par C sont captés par A : il y a saturation.

E 85. *Une cellule a une cathode* C *constituée d'un métal dont la fréquence du seuil photoélectronique est* $\nu_0 = 4{,}6 \cdot 10^{14}$ Hz. *On l'éclaire avec une radiation monochromatique ayant cette fréquence* ν_0, la cathode reçoit la puissance $\mathcal{P} = 240$ μW, *le rendement quantique est* r = 0,2 %.
Dessiner, en la justifiant, l'allure de la caractéristique représentant les variations de l'intensité du courant I *en fonction de la tension* U_{AC}, A *désignant l'anode.*
Donnée : constante de Planck $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s.

S 85. (Nous ne donnons que quelques indications.)



• Le potentiel d'arrêt :

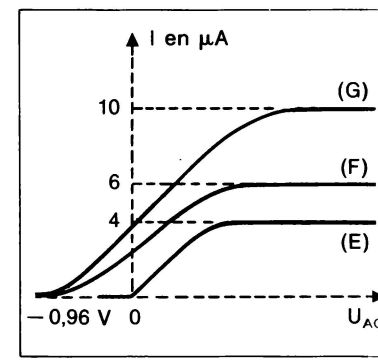
$$U_0 = \frac{h}{e}(\nu - \nu_0) = 0$$

car $\nu = \nu_0$.

• Dès que $U_{AC} > 0$ des électrons accélérés, partant tous de C à vitesse nulle, arrivent en A. Au fur et à mesure que U_{AC} augmente, I augmente jusqu'à une certaine limite I_s, appelée intensité de saturation.

• $n' = \frac{\mathcal{I}}{h\nu_0}$, d'où $n = n'r$ et $I_s = ne = \frac{\mathcal{I}re}{h\nu_0} = 2{,}5 \cdot 10^{-7}$ A $= 0{,}25$ μA.

E 86. *Une cellule a une couche photoémissive constituée d'un métal dont l'énergie d'extraction* $W_0 = 2{,}23$ eV. *Cette cellule est éclairée successivement par trois radiations électromagnétiques monochromatiques lors des trois expériences* E, F *et* G :
— *expérience* E : *fréquence du rayonnement* ν_E, puissance reçue par la couche photoémissive $\mathcal{I}_E$;
— expérience F : ν_F *et* $\mathcal{I}_F$;
— *expérience* G : ν_G *et* $\mathcal{I}_G$.
Les caractéristiques (E), (F) *et* (G) *correspondent respectivement à ces trois expériences.*



a) *Quelles sont les fréquences* ν_E, ν_F *et* ν_G? $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s.

b) *Évaluer le rapport* $\frac{\mathcal{I}_G}{\mathcal{I}_F}$. *Pourquoi ne peut-on évaluer* $\frac{\mathcal{I}_F}{\mathcal{I}_E}$?

c) *On éclaire maintenant la cellule simultanément avec le rayonnement* ν_E *de puissance* $\mathcal{I}_E$ *et le rayonnement* ν_G *de puissance* $\mathcal{I}_G$. *Dessiner, en justifiant son allure, la caractéristique de la cellule lors de cette nouvelle expérience.*

S 86. *a)* • Présentation de la démarche : à partir de l'énergie d'extraction W_0 on peut en déduire la fréquence seuil ν_0; à partir des potentiels d'arrêt relevés sur le graphique on peut en déduire les fréquences ν_E, ν_F et ν_G.

• La fréquence seuil $\nu_0 = \frac{W_0}{h} = 5{,}39 \cdot 10^{14}$ Hz.

• Comme le potentiel d'arrêt $(U_0)_E = 0$, les électrons dans l'expérience E sortent à vitesse nulle de la couche photoémissive : les photons E ont juste l'énergie W_0, par suite $\nu_E = \nu_0$.

• Comme $(U_0)_F = (U_0)_G = 0{,}96$ V, les radiations F et G ont la même fréquence : $\nu_F = \nu_G$.

On expliquera en quelques lignes (revoir $\mathcal{M}$ 91) que $(U_0)_F = \frac{h}{e}(\nu_F - \nu_0)$. Par suite

$$\nu_G = \nu_F = \frac{e\,(U_0)_F}{h} + \nu_0 = 7{,}71 \cdot 10^{14} \text{ Hz}.$$

b) • Présentation de la démarche : pour un métal et une fréquence donnés le rendement quantique est donné; en reliant la puissance reçue $\mathcal{P}$ à l'intensité de saturation on va pouvoir comparer $\mathcal{P}_F$ et $\mathcal{P}_G$.

• Soit I_F l'intensité de saturation dans l'expérience F :

— d'une part $I_F = n_F e$ (n_F désignant le nombre d'électrons reçus chaque seconde par l'anode donc émis par la cathode puisque la saturation est atteinte);

— d'autre part $\mathcal{P}_F = n'_F h\nu_F$ (n'_F désignant le nombre de photons par seconde reçus par la cathode);

— le rendement quantique $r_F = \frac{n_F}{n'_F} = \frac{\frac{I_F}{e}}{\frac{\mathcal{P}_F}{h\nu_F}} = \frac{I_F h\nu_F}{\mathcal{P}_F e}$. (1)

• De même en désignant par I_G l'intensité de saturation dans l'expérience G :

$$r_G = \frac{I_G h\nu_G}{\mathcal{P}_G e}. \quad (2)$$

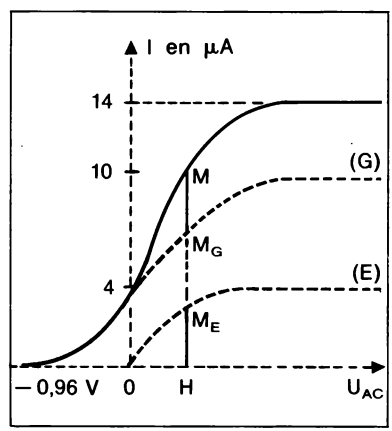
Comme $\nu_F = \nu_G$ et $r_F = r_G$, on obtient en égalant (1) et (2) et en simplifiant $\frac{I_G}{\mathcal{P}_G} = \frac{I_F}{\mathcal{P}_F}$ d'où $\frac{\mathcal{P}_G}{\mathcal{P}_F} = \frac{I_G}{I_F} = \frac{10}{6} = 1{,}67$.

• On ne peut pas comparer facilement $\mathcal{P}_F$ et $\mathcal{P}_E$ car les rendements quantiques r_F et r_E peuvent être différents, les fréquences n'étant pas les mêmes.

c) • La couche photoémissive est maintenant frappée par des photons de deux types : les photons E d'énergie $h\nu_E$ et les photons G d'énergie $h\nu_G$.

Les photons, qu'ils soient identiques ou différents, ne peuvent s'associer pour extraire un électron : les photons se comportent indépendamment les uns des autres.

Nous allons donc observer la superposition de l'effet photoélectronique de l'expérience E avec l'effet photoélectronique de l'expérience G.



La caractéristique va être telle que, pour chaque valeur de U_{AC}, l'intensité I du courant total soit la somme de l'intensité que l'on observerait si les photons E étaient seuls et de l'intensité que l'on observerait si les photons G étaient nuls. Ainsi le point M de la caractéristique est tel que :

$$\overline{HM} = \overline{HM_E} + \overline{HM_G},$$

c'est-à-dire que $\overline{M_G M} = \overline{HM_E}$. On peut ainsi construire point par point la caractéristique dans cette nouvelle expérience.

• La cellule n'est donc traversée par aucun courant pour $U_{AC} < -0{,}96$ V; la caractéristique se confond avec la caractéristique (G) de l'expérience G tant que $U_{AC} < 0$; l'intensité de saturation $I = I_E + I_G = 4\ \mu A + 10\ \mu A = 14\ \mu A$.

E 87. *Que pensez-vous des affirmations suivantes, justifiez vos réponses sans calcul important.*

① *Lorsque* $U_{AC} < -U_0$, *il n'y a plus d'effet photoélectronique.*

② *A partir du potentiel d'arrêt d'une cellule au césium éclairée par une radiation de fréquence connue on peut en déduire l'énergie nécessaire à un électron pour sortir d'un atome de césium.*

③ *Une cellule photoélectrique est traversée par un courant électrique, le sens du courant ne dépend pas du signe de la différence de potentiel* U_{AC}.

④ *Pour qu'il y ait effet photoélectronique il faut utiliser une cellule photoélectrique.*

⑤ *Le potentiel d'arrêt ne dépend pas de la puissance rayonnante reçue par la cathode de la cellule.*

⑥ *A partir de* I *on peut en déduire le nombre d'électrons reçus chaque seconde par l'anode même si on n'est pas à la saturation.*

⑦ *Pour une cellule et un rayonnement donnés l'intensité de saturation est proportionnelle à la puissance rayonnante reçue.*

⑧ *Les électrons ne sortent pas tous à la même vitesse de la plaque photoémissive car les photons abandonnent une plus ou moins grande partie de leur énergie.*

⑨ *L'intensité croît avec* U_{AC} *car les électrons sont de plus en plus nombreux à sortir de la cathode.*

⑩ *Les deux conditions nécessaires pour qu'une cellule soit traversée par un courant électrique sont :*

— *d'une part que la tension* $U_{AC} > -U_0$;

— *d'autre part que la puissance lumineuse reçue par la cathode soit suffisante.*

S 87. (A vous de voir si vous obtenez 10 sur 10!)

① Non, seule la fréquence de rayonnement conditionne l'existence de l'effet photoélectronique. Si $\nu \geqslant \nu_0$ et si $U_{AC} < -U_0$ il n'y a pas de courant mais il y a cependant effet photoélectronique.

② Cette question (extraite d'un sujet d'examen) est mal posée :

— si « atome de césium » est pris au sens de « atome isolé dans la vapeur de césium », la réponse est non, en effet l'énergie nécessaire pour extraire alors un électron est l'énergie d'ionisation E_i;

— si « atome de césium » est pris au sens de « atome de césium dans le métal césium », la réponse est oui, en effet à partir du potentiel d'arrêt U_0 on en déduit l'énergie cinétique maximale $E_{C,m} = eU_0$, à partir de $E_{C,m}$ on en déduit W_0 par des considérations sur l'énergie apportée par le photon : $E_{C,m} = h\nu - W_0$, d'où $W_0 = h\nu - eU_0$.

③ Oui, le courant, s'il existe, traverse la cellule de A vers C que U_{AC} soit positif ou négatif (compris alors entre $-U_0$ et zéro).

④ Non, la cellule photoélectrique est un appareil qui permet d'étudier quantitavement l'effet photoélectrique, mais qui n'est pas indispensable : ainsi des ultraviolets frappant une plaque de zinc placée dans l'air provoquent l'effet photoélectrique.

⑤ Oui, le potentiel d'arrêt pour une cathode donnée ne dépend que de la fréquence du rayonnement.

⑥ Oui, I = ne convient pour déterminer le nombre d'électrons reçus par A chaque seconde (à la saturation n représente en plus le nombre d'électrons émis par C chaque seconde).

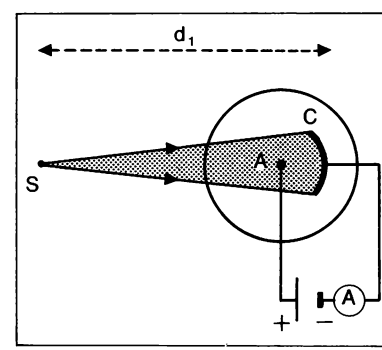
⑦ Oui, cela provient du fait que le rendement quantique reste alors constant.

⑧ Non, un photon qui interagit avec un électron libre du métal lui abandonne toute son énergie. (C'est dans les chocs, avant de sortir du métal, que l'électron expulsé perd plus ou moins d'énergie cinétique.)

⑨ Non, pour une cellule éclairée de façon donnée (ν et $\mathcal{P}$ donnés), le nombre d'électrons émis chaque seconde par la couche photoémissive est constant. La tension U_{AC} conditionne la récolte des électrons par A mais pas l'émission d'électrons par C.

⑩ La première condition est nécessaire, la deuxième condition n'est pas nécessaire : il n'y a pas de seuil de puissance (c'est-à-dire de puissance en dessous de laquelle l'effet photoélectronique n'est pas observé).
Les deux conditions nécessaires pour que la cellule soit traversée par un courant sont :
— d'une part qu'il y ait effet photoélectronique donc $\nu \geqslant \nu_0$ (ou $\lambda \leqslant \lambda_0$);
— d'autre part que $U_{AC} > -U_0$.

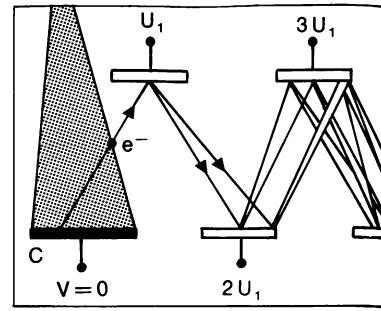
E 88. *Une source lumineuse* S *peu intense, quasi ponctuelle, émet un faisceau lumineux monochromatique de longueur d'onde dans le vide* $\lambda = 0{,}48$ µm.



a) *La cellule photoélectrique a sa cathode dirigée vers* S, *placée à la distance* $d_1 = 0{,}8$ m *de* S. *La cathode reçoit ainsi la puissance lumineuse* $\mathcal{P}_1$.
L'intensité du courant de saturation est $I_1 = 10^{-10}$ A.
Calculer la puissance lumineuse $\mathcal{P}_1$ *reçue sachant que le rendement de la cellule est* 1 %.

b) *On rapproche la cellule de* S, *la cathode est maintenant à la distance* $d_2 = 0{,}2$ m *de* S. *Donner une valeur approchée de la nouvelle intensité de saturation* I_2.
On rappelle que :
— *la constante de Planck* $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s;
— *la surface d'une sphère de rayon* R *est* $S = 4\pi R^2$.

c) *On remplace la cellule photoélectrique par un photomultiplicateur. Dans cet appareil un électron de la couche sensible* C, *maintenu au potentiel électrique zéro, est accéléré et dirigé sur une première cible (appelée dynode) portée au potentiel positif* U_1. *Son impact sur la cible est suivi de l'émission par celle-ci de* K *électrons dits secondaires. Les* K *électrons secondaires sont dirigés vers une nouvelle cible au potentiel* $2U_1$, *etc.*
A la fin de l'appareil après la cible de numéro k, *une anode* A *récupère tous les électrons secondaires issus de la cible* k.



Le coefficient K *est le même pour toutes les cibles et vaut en moyenne* 3,9. *Il y a* $k = 11$ *cibles (ou dynodes).*
Le courant qui entre par l'anode A *dans le photomultiplicateur a pour intensité* $I_3 = 430\ \mu A$, *quelle est la puissance rayonnante* $\mathcal{P}_3$ *reçue par la couche sensible* C?
Données : la couche sensible est toujours éclairée par la source S.
le rendement de la couche sensible C *est* 1 %.

S 88. *a*) Réponse :

$$\mathcal{P}_1 = \frac{hcI_1}{re\lambda} = 2{,}59 \cdot 10^{-8}\ \text{W}. \qquad (1)$$

b) • Soit s la surface de la cathode C.
• Supposons :
— qu'on puisse assimiler la cathode à une portion de sphère de centre S, de rayon d_1;
— que la source émette de la même façon dans toutes les directions de l'espace la puissance lumineuse $\mathcal{P}_{source}$.
La puissance $\mathcal{P}_1$ représente la fraction $\frac{s}{4\pi d_1^2}$ de la puissance $\mathcal{P}_{source}$:

$$\mathcal{P}_1 = \frac{s}{4\pi d_1^2}\,\mathcal{P}_{source}. \qquad (2)$$

• Avec les mêmes hypothèses pour la cathode à la distance d_2 de S :

$$\mathcal{P}_2 = \frac{s}{4\pi d_2^2}\,\mathcal{P}_{source}. \qquad (3)$$

• Faisons le rapport (3) sur (2) : $\frac{\mathcal{P}_2}{\mathcal{P}_1} = \frac{d_1^1}{d_2^2} = \frac{0{,}8^2}{0{,}2^2} = 16.$

• D'après (1), puisque r et λ sont inchangés :

$$\mathcal{P}_2 = \frac{hcI_2}{re\lambda}. \qquad (4)$$

• Faisons le rapport (4) sur (1) : $\frac{\mathcal{P}_2}{\mathcal{P}_1} = \frac{I_2}{I_1} = 16.$
Par suite $I_2 = 16\,I_1 = 16 \cdot 10^{-10}\ \text{A} = 1{,}6\ \text{nA}.$

Bien que multipliée par 16, l'intensité reste faible, nous allons découvrir l'intérêt du photomultiplicateur.

c) • Pour 1 électron émis par effet photoélectrique par C, la cible n° 1 donne naissance à K électrons secondaires. Ainsi K électrons frappent la cible 2, K^2 électrons partent de cette cible 2 et frappent la cible 3. K^3 électrons partent de la cible 3, ...
Finalement K^k électrons partent de la cible k et sont captés par l'anode : on dit que le facteur de multiplication est K^k.
• Déterminons le nombre d'électrons n émis par effet photoélectronique, par C, chaque seconde : $n = n'r$ (n' nombre de photons frappant C chaque seconde, r rendement).

Comme $n' = \dfrac{\mathcal{P}_3}{h\dfrac{c}{\lambda}}$, il s'ensuit $n = \dfrac{\mathcal{P}_3 \lambda r}{hc}$.

• Il arrive donc $N = nK^k = \dfrac{\mathcal{P}_3 \lambda r}{hc} K^k$ électrons en A chaque seconde.

L'intensité du courant $I_3 = Ne = \dfrac{\mathcal{P}_3 \lambda r K^k e}{hc}$.

D'où $\mathcal{P}_3 = \dfrac{I_3 hc}{\lambda r K^k e} = 3{,}50 \cdot 10^{-8}$ W.

Ainsi pour une puissance lumineuse captée voisine de $\mathcal{P}_1$, l'intensité du courant détecté est nettement plus grande (le coefficient d'amplification $K^k = 3{,}17$ millions).

E 89. *(L'effet Compton.)*

a) *Pour réaliser une expérience d'effet Compton, on utilise un pinceau de rayons* X *incident dont chaque photon a une énergie* $E_i = 16{,}0$ keV. *Calculer la longueur d'onde* λ_i *et la quantité de mouvement* p_i d'un tel photon.

b) *Les photons d'un pinceau heurtent des électrons que l'on considère comme initialement libres et au repos. On s'intéresse au cas où, après la collision, le photon est diffusé dans une direction à 90° de celle du pinceau incident. Les photons ainsi diffusés ont une longueur d'onde* $\lambda_d = 0{,}80 \cdot 10^{-10}$ m. *Calculer la norme de la quantité de mouvement* $\vec{p}_e$ *d'un électron ayant subi un tel choc.*

c) *L'électron expulsé est-il relativiste? Exprimer son énergie cinétique en fonction de* p_e *et de sa masse.*

d) *Vérifier la conservation de l'énergie lors d'un tel choc.*

Données :
— *constante de Planck* $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s;
— *masse de l'électron* $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

(D'après bac)

92 **Quantité de mouvement d'un photon.**

• Soit un rayon lumineux de fréquence ν, on peut le caractériser par son vecteur d'onde $\vec{k}$ (revoir ℳ 81), de module $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$.

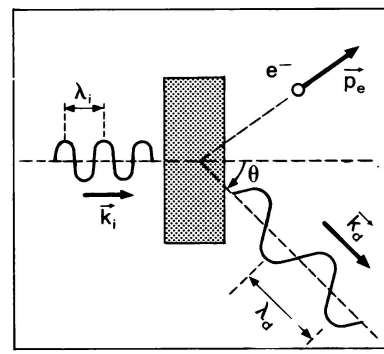
• L'énergie de ce rayon est véhiculée par des photons d'énergie $h\nu$, de masse nulle, de vecteur quantité de mouvement $\vec{p}$.
— Pour évaluer la norme de $\vec{p}$, on peut utiliser l'expression donnant l'énergie totale d'une particule relativiste $E = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}$ dans laquelle $E = h\nu$ et $m = 0$, par suite :

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

— Vectoriellement $\vec{p} = \frac{h}{2\pi}\vec{k}$ $\left(\text{le rapport } \frac{h}{2\pi} \text{ se note aussi } \hbar\right)$.

93 L'**effet Compton.**

• Un photon, correspondant à un rayonnement incident de vecteur d'onde $\vec{k}_i$, de longueur d'onde λ_i, interagit avec un électron non lié, au repos :
— l'électron est éjecté;
— le photon est diffusé : le rayonnement diffusé correspondant a pour vecteur d'onde $\vec{k}_d$, pour longueur d'onde $\lambda_d > \lambda_i$.



• Au cours de ce choc élastique, les lois de conservation de l'énergie et du vecteur quantité de mouvement permettent d'établir :

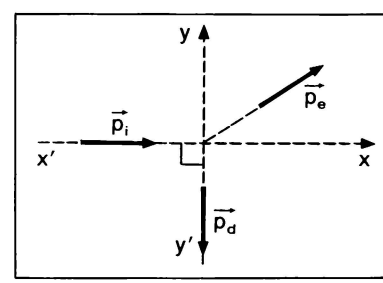
$$\lambda_d - \lambda_i = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

en désignant par θ l'angle $(\vec{k}_i, \vec{k}_d)$.

S 89. *a*) Réponses :

$$\lambda_i = \frac{hc}{E_i} = 7{,}76 \cdot 10^{-11} \text{ m};$$

$$p_i = \frac{E_i}{c} = 8{,}53 \cdot 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$



b) Considérons le système électron-photon incident : la quantité de mouvement de ce système se conserve vectoriellement au cours de l'interaction.

En remarquant que l'électron est initialement au repos, il s'ensuit $\vec{p_i} + \vec{0} = \vec{p_d} + \vec{p_e}$, d'où $\vec{p_e} = \vec{p_i} - \vec{p_d}$.

Dans le système d'axes (x'x, y'y) :

$$\vec{p_i} \left| \begin{matrix} p_i \\ 0 \end{matrix} \right. \qquad \vec{p_d} \left| \begin{matrix} 0 \\ -p_d \end{matrix} \right. .$$

Par suite $\vec{p_e} \left| \begin{matrix} p_i = 8{,}53 \cdot 10^{-24}\ \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \\ +p_d = \dfrac{h}{\lambda_d} = 8{,}27 \cdot 10^{-24}\ \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}. \end{matrix} \right.$

La norme de $\vec{p_e}$ est $p_e = \sqrt{p_i^2 + p_d^2} = 1{,}19 \cdot 10^{-23}\ \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

c) • Déterminons le rapport $\dfrac{p_e c}{E_0}$: si ce rapport est inférieur à 0,1, l'électron n'est pas relativiste (revoir *M* 87).

$\dfrac{p_e c}{mc^2} = \dfrac{p_e}{mc} = 4{,}36 \cdot 10^{-2}$: l'électron obéit aux lois de la mécanique newtonienne.

• En particulier son énergie cinétique $E_{c,e} = \dfrac{1}{2} m v_e^2 = \dfrac{1}{2} \dfrac{(m v_e)^2}{m} = \dfrac{1}{2} \dfrac{p_e^2}{m}$.

d) L'énergie totale du système avant le choc, en désignant par E_0 l'énergie de repos de l'électron, est : $E_i + E_0 = E_i + mc^2 = 8{,}446 \cdot 10^{-14}$ J.
Après le choc, elle devient égale à :

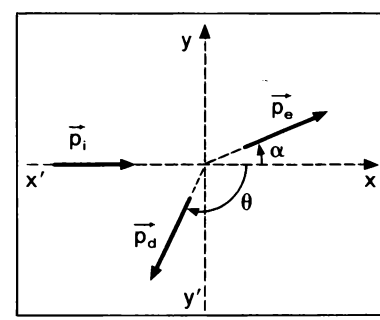
$$E_d + (E_0 + E_{c,e}) = \frac{hc}{\lambda_d} + \left(mc^2 + \frac{1}{2} \frac{p_e^2}{m} \right) = 8{,}446 \cdot 10^{-14}\ \text{J}$$

l'énergie totale se conserve.

E 90. *On veut réaliser une expérience de diffusion Compton avec une plaquette contenant certains électrons peu liés d'énergie de liaison de l'ordre de quelques* eV.

a) *Peut-on utiliser un rayonnement visible de longueur d'onde voisine de* 0,5 μm?

b) *On éclaire la plaquette avec un rayonnement incident de fréquence* $\nu_i = 5 \cdot 10^{18}$ Hz. *Un photon incident chemine dans la direction et le sens de l'axe* x'x, *il heurte un électron peu lié. Cet électron est expulsé avec la quantité de mouvement* $\vec{p_e}$ *telle que* $\alpha = (\vec{x'x}, \vec{p_e}) = 29°$. *Le photon est diffusé avec la quantité de mouvement* $\vec{p_d}$ *faisant avec* x'x *l'angle* $\theta = (\vec{x'x}, \vec{p_d}) = -120°$.



α) *Déterminer* p_i.

β) *En utilisant la conservation de la quantité de mouvement, déterminer* p_d *et* p_e.

γ) *Vérifier que l'énergie est conservée lors de ce choc.*

δ) *Vérifier que* $\lambda_d - \lambda_i = \dfrac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$.

c) *Question facultative : démontrer l'expression précédente.*

Données : — *constante de Planck :* $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s;
— *masse d'un électron :* $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

S 90. *a*) Le rayonnement visible proposé est constitué de photons d'énergie $\frac{hc}{\lambda} = 3{,}97 \cdot 10^{-19}$ J $\simeq 2{,}5$ eV.

Pour réaliser une expérience de diffusion Compton, il faut réaliser un choc élastique entre un photon et un électron non lié : de façon pratique, l'électron doit avoir une énergie de liaison très inférieure à l'énergie du photon. Cette condition n'est pas réalisée avec les photons « visibles ».

b) α) Réponse : $p_i = \frac{h\nu_i}{c} = 1{,}10 \cdot 10^{-23}$ kg·m·s^{-1}.

β) • D'après la conservation de la quantité de mouvement du système photon-électron :

$$\vec{p_i} + \vec{0} = \vec{p_e} + \vec{p_d}$$

(On a négligé la quantité de mouvement initiale de l'électron.)

• Projetons sur x'x :

$$p_i = p_e \cos\alpha + p_d \cos\theta,$$

soit
$$1{,}10 \cdot 10^{-23} = 0{,}875\, p_e - 0{,}5\, p_d \qquad (1)$$

• Projetons sur y'y :

$$0 = p_e \sin\alpha + p_d \sin\theta,$$

soit
$$0 = 0{,}485\, p_e - 0{,}866\, p_d \qquad (2)$$

• D'après (1) et (2) :

$$p_d = 1{,}035 \cdot 10^{-23} \text{ kg·m·s}^{-1}$$
$$p_e = 1{,}848 \cdot 10^{-23} \text{ kg·m·s}^{-1}.$$

γ) • Le rapport $\frac{p_e c}{mc^2} = \frac{p_e}{mc} = \frac{1{,}848 \cdot 10^{-23}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \times 3 \cdot 10^8} = 6{,}77 \cdot 10^{-2}$, il est inférieur à 0,1, l'électron n'est pas relativiste.

• L'énergie totale du système avant le choc est, en désignant par E_0 l'énergie de repos de l'électron, $E_i + E_0 = p_i c + mc^2 = 8{,}52 \cdot 10^{-14}$ J.
Après le choc elle devient égale à $E_d + (E_0 + E_{c,e})$. Comme l'électron n'est pas relativiste $E_{c,e} = \frac{1}{2}\frac{p_e^2}{m}$. L'énergie après le choc a donc pour expression $p_d c + \left(mc^2 + \frac{1}{2}\frac{p_e^2}{m}\right) \simeq 8{,}52 \cdot 10^{-14}$ J : l'énergie s'est donc conservée.

δ) D'après nos résultats $\lambda_d - \lambda_i = \frac{h}{p_d} - \frac{h}{p_i} = 3{,}78 \cdot 10^{-12}$ m.
D'après la formule $\lambda_d - \lambda_i = 3{,}64 \cdot 10^{-12}$ m.
L'écart provient essentiellement des approximations lors de la mesure des angles α et θ (l'écart est d'environ 4 %).

c) • La conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\vec{p_i} = \vec{p_e} + \vec{p_d} \quad \text{soit} \quad \vec{p_i} - \vec{p_d} = \vec{p_e}. \qquad (1)$$

• L'énergie du photon incident est $E_i = p_i c$, celle de l'électron au repos mc^2, celle de l'électron expulsé $\sqrt{(p_e c)^2 + (mc^2)^2}$, celle du photon diffusé $p_d c$.

Par conservation de l'énergie $p_i c + mc^2 = p_d c + \sqrt{(p_e c)^2 + (mc^2)^2}$, soit en simplifiant par c et en arrangeant :

$$p_i - p_d + mc = \sqrt{p_e^2 + (mc)^2}. \qquad (2)$$

• Élevons (1) au carré scalaire :

$$p_i^2 + p_d^2 - 2\vec{p_i}\cdot\vec{p_d} = p_e^2,$$

soit
$$p_i^2 + p_d^2 - 2 p_i p_d \cos\theta = p_e^2. \qquad (1')$$

• Élevons (2) au carré :

$$(p_i - p_d)^2 + 2(p_i - p_d)mc + (mc)^2 = p_e^2 + (mc)^2.$$

Retranchons $(mc)^2$, remplaçons p_e^2 par son expression (1') :

$$(p_i - p_d)^2 + 2(p_i - p_d)mc = p_i^2 + p_d^2 - 2 p_i p_d \cos\theta.$$

Après simplification :

$$mc(p_i - p_d) = p_i p_d (1 - \cos\theta).$$

Divisons par $p_i p_d$:

$$mc\left(\frac{1}{p_d} - \frac{1}{p_i}\right) = 1 - \cos\theta.$$

Comme $p_d = \frac{h}{\lambda_d}$ et $p_i = \frac{h}{\lambda_i}$:

$$\lambda_d - \lambda_i = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta).$$

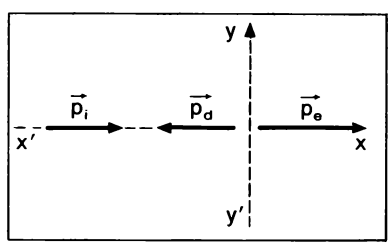
E 91. *On considère la rétrodiffusion c'est-à-dire que dans toute la suite, le photon diffusé par le choc contre un électron, non lié, au repos, revient dans la même direction que le photon incident mais en sens contraire.*

a) *Évaluer la quantité de mouvement* p_e *de l'électron ainsi expulsé en fonction de la quantité de mouvement* p_i *du photon incident, de la masse* m *de l'électron et de la célérité* c *de la lumière dans le vide.*

b) *Quelle condition doit respecter la longueur d'onde* λ_i *du rayonnement incident pour que l'électron expulsé par rétrodiffusion soit relativiste?*

Données : $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s
$m \doteq 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

S 91. *a)* • D'après la conservation de la quantité de mouvement du système photon-électron :



$$\vec{p_i} + \vec{0} = \vec{p_d} + \vec{p_e}.$$

D'où $\vec{p_e} = \vec{p_i} - \vec{p_d}$.
En norme $p_e = p_i + p_d$. (1)

• D'après la conservation de l'énergie :

$$p_i c + mc^2 = p_d c + \sqrt{(mc^2)^2 + (p_e c)^2}.$$

Remplaçons p_d par $p_e - p_i$: $p_i c + mc^2 = (p_e - p_i)c + \sqrt{(mc^2)^2 + (p_e c)^2}$.

Divisons par c et arrangeons :

$$(2p_i + mc) - p_e = \sqrt{(mc)^2 + p_e^2}.$$

Élevons au carré :

$$(2p_i + mc)^2 - 2p_e(2p_i + mc) + p_e^2 = m^2c^2 + p_e^2.$$

Simplifions, on trouve :

$$p_e = \frac{2p_i(p_i + mc)}{2p_i + mc}. \qquad (2)$$

b) L'électron est relativiste si $\frac{p_e c}{mc^2} > 0{,}1$, donc si $p_e > 0{,}1\ mc$.

D'après (2) $$\frac{2p_i(p_i + mc)}{2p_i + mc} > 0{,}1\ mc.$$

On aboutit à :

$$2p_i^2 + 2p_i mc > 0{,}2p_i mc + 0{,}1m^2c^2.$$

D'où $$p_i^2 + 0{,}9\,mcp_i - 0{,}05\,m^2c^2 > 0.$$

L'équation $p_i^2 + 0{,}9\,mcp_i - 0{,}05\,m^2c^2 = 0$ admet une racine négative, une racine positive $p_i = 0{,}052\,5\ mc$. Le trinôme est positif pour $p_i > 0{,}052\,5\ mc$. Par suite pour $p_i = \frac{h}{\lambda_i} > 0{,}052\,5\ mc$, l'électron éjecté est relativiste. Cela nécessite que $\lambda_i < \frac{h}{0{,}052\,5\ mc} = 4{,}62 \cdot 10^{-11}$ m.

(Cette longueur d'onde limite appartient au domaine des rayons X.)

POURQUOI ?

Certains énoncés donnent la longueur d'onde sans préciser le milieu de propagation, que faut-il entendre?

C'est alors tacitement de la longueur d'onde dans le vide qu'il s'agit (ou à la rigueur dans l'air).

Pourquoi attribuer tant d'importance à l'énergie cinétique de sortie des électrons expulsés par effet photoélectronique, alors que dans un canon à électron on ne tient pas compte de l'énergie cinétique des électrons expulsés par effet thermo-électronique?

Le fait que les électrons expulsés aient des énergies cinétiques de sortie comprises, pour un rayonnement monochromatique donné, entre zéro et une valeur maximale $E_{C,m}$ n'a effectivement pas une grande importance pratique. Mais son importance théorique est considérable.
Ainsi il a fallu pour expliquer que $E_{C,m}$ ne dépendait pas de la puissance rayonnante reçue $\mathcal{P}$, considérer que l'énergie rayonnante n'était pas répartie continûment dans le faisceau mais était localisée en petits grains d'énergie ou photons.
Ainsi établir que $E_{C,m}$ est fonction affine de la fréquence ν permet de vérifier la formule $E = h\nu$ et d'en déduire la constante de Planck.

Cela me gêne d'appeler cathode la plaque photoémissive et anode l'électrode chargée de récolter les électrons lorsque $U_{AC} < 0$.

• Évidemment lorsque la cellule est polarisée de façon directe, $U_{AC} > 0$, il n'y a aucune difficulté de langage : la cathode est bien l'électrode $-$, l'anode l'électrode $+$.
• En polarisation inverse, $U_{AC} < 0$, l'usage veut que l'on appelle encore cathode la plaque photoémissive alors qu'elle est polarisée $+$. En d'autres termes pour une cellule photoélectronique « cathode » est devenu synonyme de « plaque photoémissive ».

Est-ce qu'un électron libre, avant d'interagir avec un photon, a une énergie cinétique?

Dans le métal à température ordinaire, l'électron libre a une énergie cinétique moyenne de quelques centièmes d'électron-volt. L'énergie cinétique maximale de sortie est de l'ordre de U_0 électron-volts (donc de l'ordre de l'électron-volt). On peut donc négliger l'énergie cinétique initiale de l'électron libre avant l'interaction avec le photon c'est ce qu'on fait toujours.

Nous avons vu que la cellule photoélectrique commandée par une radiation convenable est un petit générateur électrique, est-ce ce générateur qui est utilisé pour obtenir de l'électricité dans les panneaux solaires?

Dans les panneaux solaires, dans les posemètres on n'utilise pas les cellules photoélectriques à vide décrites dans ce cours dont les rendements sont faibles et qui nécessitent des générateurs auxiliaires pour récolter le maximum d'électrons.
On utilise des photophiles dont les rendements sont beaucoup plus importants.

8 LES NIVEAUX D'ÉNERGIE DANS UN ATOME

E 92. *Un tube muni de deux électrodes contient du gaz dihydrogène* H_2 *sous faible pression. On établit une différence de potentiel entre ces électrodes, des décharges électriques naissent. Au cours de ces décharges il se crée des atomes* H *isolés qui sont bombardés en particulier par des électrons. On observe que le tube s'illumine émettant quatre lumières monochromatiques visibles.*

a) *Comment qualifie-t-on le spectre obtenu?*

b) *Qu'appelle-t-on état fondamental d'un atome* H, *états excités, état seuil d'ionisation?*

c) *Que peut-on dire des niveaux d'énergie correspondant à ces divers états?*

d) *Placer sur un axe le niveau fondamental, les 6 premiers niveaux excités, le niveau seuil d'ionisation.*

e) *Les quatre raies visibles observées correspondent à des transitions* (6 ⟶ 2), (5 ⟶ 2), (4 ⟶ 2), (3 ⟶ 2) *ramenant les atomes* H *excités des niveaux* 6, 5, 4, 3 *à leur niveau* 2.
Calculer la fréquence de ces 4 raies et leur longueur d'onde dans le vide.
Données :
constante de Planck : $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s
niveaux d'énergie de l'atome H : $E_n = \dfrac{-13{,}6}{n^2}$ *en* eV.

94 **Les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène.**

• L'énergie de l'atome d'hydrogène (énergie potentielle + énergie cinétique de l'électron par rapport au noyau) ne peut prendre qu'une série de valeurs bien déterminées notées par ordre croissant E_1, E_2, ..., E_p, ..., E_n, ..., E_∞. Pour traduire le fait que l'énergie varie de façon discontinue, on dit que les niveaux d'énergie sont *discrets* ou que l'énergie est *quantifiée.*

— Lorsque l'atome n'est soumis à aucune action extérieure, son énergie est minimale, égale à E_1 : on dit que l'atome est à son *état fondamental.*

— Lorsque l'atome est excité, son énergie peut prendre l'une des valeurs de la suite (E_2, E_3, ..., E_∞), l'atome reste un temps très court dans cet *état excité.*

— L'électron est d'autant moins lié au noyau de l'atome H (portant une charge +e) que le niveau d'énergie est grand. Lorsque l'atome est excité au maximum (E_∞), l'électron se sépare du noyau : on obtient un ion H^+ et un électron à vitesse nulle : on dit qu'on est au *seuil d'ionisation.*

— Si on prend l'atome au seuil d'ionisation comme état de référence à énergie nulle (c'est-à-dire si on pose $E_\infty = 0$), les niveaux d'énergie de l'atome H ont pour valeur *en électronvolt :*

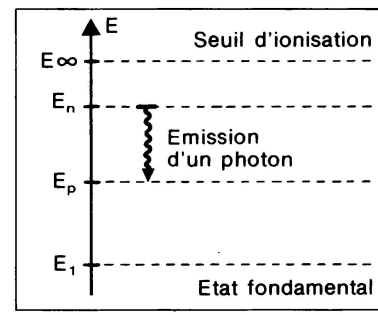
$$E_n = \frac{-13{,}6}{n^2}.$$

Le nombre entier $n \geqslant 1$ est appelé nombre quantique principal de l'atome H.

95 **La désexcitation d'un atome d'hydrogène.**

• L'atome H excité revient vers son état fondamental, soit directement, soit en passant par des états excités intermédiaires.
Ainsi lorsque l'atome passe du niveau n au niveau $p < n$ par la transition décroissante $n \longrightarrow p$, **il y a émission d'un photon d'énergie** $h\nu = E_n - E_p$.

• Pour l'atome H, toutes les transitions sont possibles.



S 92. *a*) • La lumière provient directement du tube (elle n'a pas traversé de substances absorbantes), lorsqu'on analyse cette lumière à l'aide d'un spectroscope on obtient un spectre d'émission.

• Le spectre comprend un certain nombre de raies (4 dans le visible, de très nombreuses dans l'infrarouge ou l'ultraviolet) : le spectre est discontinu.

• En résumé c'est un spectre d'émission discontinu.

b) • Lorsque l'atome d'hydrogène n'est pas excité, il est dans un état stable appelé état fondamental; son énergie est minimale, égale à E_1.

• Lorsque l'atome est excité (soit par le choc d'un électron, soit par l'absorption d'un photon, voir 𝓜 96), son énergie prend l'une des valeurs de la suite bien déterminée (E_2, E_3, ..., E_∞) : l'atome est alors dans un état excité instable. Très vite, l'atome aura tendance à revenir vers l'état fondamental en effectuant une ou des transitions décroissantes, chaque transition s'accompagnant de l'émission d'un photon.

• Lorsque l'atome a atteint son plus haut niveau d'excitation d'énergie E_∞, l'électron se délie du noyau. Cet état où prennent naissance, à partir de l'atome H, un ion H^+ et un électron, est appelé l'état seuil d'ionisation.

c) Les niveaux d'énergie correspondant aux divers états excités sont discrets, on dit aussi qu'ils sont quantifiés : cela signifie que l'atome H ne peut pas prendre une énergie comprise entre E_4 et E_5 par exemple, il prend l'énergie E_4 ou bien l'énergie E_5. Les niveaux d'énergie augmentent de E_1 à E_∞.

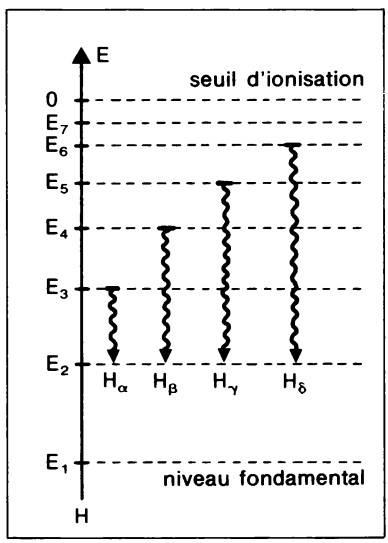
d) • Pour l'atome H, si on convient que l'énergie de l'atome au seuil d'ionisation est nulle, les niveaux d'énergie ont pour valeurs, en électronvolts,

$$E_n = \frac{-13,6}{n^2}.$$

Lorsque n augmente de 1 à ∞, E_n augmente de $-13,6$ eV (pour $n=1$) à zéro (pour n infiniment grand).
Le tableau suivant donne les valeurs de E_n pour l'état fondamental (énergie E_1, $n=1$) et pour les 6 premiers états excités d'énergies E_2, ..., E_7. Les énergies sont exprimées en eV.

$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$
E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7
$-13,6$	$-3,4$	$-1,51$	$-0,85$	$-0,54$	$-0,38$	$-0,28$

Au fur et à à mesure que n croît les niveaux d'énergie augmentent en se rapprochant.
• Sur le diagramme d'énergie ci-contre sont indiqués :
— le niveau fondamental ($n=1$; E_1);
— le niveau de référence (seuil d'ionisation, n infiniment grand, $E_\infty = 0$);
— les 6 premiers niveaux excités;
— les 4 transitions correspondant à la question e).
(A cause du tassement des niveaux d'énergie lorsque n augmente, l'échelle n'est pas respectée de façon à ce que le diagramme reste lisible.)



e) • Lorsque l'atome d'hydrogène passe du niveau excité 6 au niveau excité 2, il abandonne d'un seul coup le grain d'énergie $E_6 - E_2$ constituant un photon dont le rayonnement électromagnétique associé a pour fréquence ν_δ telle que :

$$h\nu_\delta = E_6 - E_2$$

$$\nu_\delta = \frac{E_6 - E_2}{h} = \frac{(-0,38 \times 1,6 \cdot 10^{-19}) - (-3,4 \times 1,6 \cdot 10^{-19})}{6,62 \cdot 10^{-34}} = 7,3 \cdot 10^{14} \text{ Hz}.$$

La longueur d'onde de ce rayonnement est :

$$\lambda_\delta = \frac{c}{\nu_\delta} = \frac{3 \cdot 10^8}{7,3 \cdot 10^{14}} = 4,11 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 0,411 \ \mu\text{m}.$$

• On calculera de la même façon : $\nu_\gamma = \frac{E_5 - E_2}{h} = 6,91 \cdot 10^{14}$ et $\lambda_\gamma = 0,434 \ \mu$m;

$\nu_\beta = \frac{E_4 - E_2}{h} = 6{,}16 \cdot 10^{14}$ Hz et $\lambda_\beta = 0{,}487$ µm; $\nu_\alpha = \frac{E_3 - E_2}{h} = 4{,}57 \cdot 10^{14}$ Hz et $\lambda_\alpha = 0{,}656$ µm.

On constate que les longueurs d'onde sont comprises entre 0,4 µm et 0,8 µm : elles correspondent à des radiations visibles (les photons H_α se rassemblent dans la traversée du spectroscope et constituent la raie rouge, les photons H_β la raie bleue, les photons H_γ et H_δ deux raies violettes).

E 93. *Les différents niveaux d'énergie* E *de l'atome d'hydrogène sont donnés par la formule* $E = \frac{-13{,}6}{n^2}$ *où* E *est exprimée en* eV *et où* n *est un nombre entier supérieur ou égal à* 1.

a) *Quelle est l'énergie minimale, en* eV *et en* J, *qu'il faut fournir à un atome d'hydrogène pour l'ioniser?*

b) *Les transitions correspondant aux différentes raies d'émission de la série de raies dite de Balmer correspondent au retour de l'atome excité à un niveau* $n > 2$ *au niveau* $p = 2$.

α) *Montrer que les longueurs d'onde des raies de la série de Balmer sont telles que :*

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

On déterminera, en unités S.I., *la valeur de la constante* R *appelée constante de Rydberg pour l'atome* H.

β) *En déduire les deux longueurs d'onde minimale* λ_m *et maximale* λ_M *de la série de Balmer.*

c) α) *Plus généralement montrer que toutes les raies d'émission de l'atome* H *ont des longueurs d'onde données par la formule :*

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad \textit{avec} \quad n > p.$$

β) *Pour chaque valeur de* p *on regroupe les raies en une série. Ainsi pour* $p = 1$ *la série s'appelle série de Lyman. Montrer que toutes les raies de la série de Lyman appartiennent au domaine des ultraviolets.*

γ) *Montrer que toutes les raies de la série de* $p = 3$, *série de Paschen, appartiennent au domaine des infrarouges.*

Données : *constante de Planck* $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s;
domaine des ultraviolets $[10^{-8}$ m; $4 \cdot 10^{-7}$ m[;
domaine du visible $[4 \cdot 10^{-7}$ m; $7{,}6 \cdot 10^{-7}$ m];
domaine des infrarouges $]7{,}6 \cdot 10^{-7}$ m; $5 \cdot 10^{-4}$ m].

S 93. *a)* • L'atome d'hydrogène, initialement supposé à son état fondamental, a pour niveau d'énergie $E_1 = \frac{-13{,}6}{1^2} = -13{,}6$ eV.

• Pour porter l'atome d'hydrogène à son seuil d'ionisation de niveau d'énergie maximal (n infiniment grand) $E_\infty = 0$ eV, il faut fournir l'énergie d'ionisation :

$$E_i = E_\infty - E_1 = 0 - (-13{,}6) = 13{,}6 \text{ eV}$$
$$= 2{,}18 \cdot 10^{-18} \text{ J}.$$

C'est l'énergie minimale à fournir pour obtenir l'ion H^+ et un électron à partir d'un atome H.

b) α) • Sur la figure de S 92 sont représentées les 4 premières transitions correspondant à la série de Balmer.
Plus généralement supposons que l'atome soit dans un état excité de numéro n, d'énergie $E_n = \dfrac{-13{,}6 \times 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{n^2} = \dfrac{-2{,}176 \cdot 10^{-18}}{n^2}$ en joule.
En revenant au niveau numéro 2, il y a émission d'un photon, correspondant à un rayonnement de longueur d'onde λ, d'énergie $\dfrac{hc}{\lambda}$ telle que :

$$\frac{hc}{\lambda} = E_n - E_2 = \frac{-2{,}176 \cdot 10^{-18}}{n^2} - \frac{(-2{,}176 \cdot 10^{-18})}{2^2}$$

d'où $$\frac{1}{\lambda} = \frac{2{,}176 \cdot 10^{-18}}{hc}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) = 1{,}096 \cdot 10^7 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

La constante de Rydberg pour l'atome d'hydrogène est donc :

$$R = 1{,}096 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}.$$

β) D'après $\dfrac{1}{\lambda} = R\left(\dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{n^2}\right)$, $\dfrac{1}{\lambda}$ augmente avec n (en effet le nombre négatif $-\dfrac{1}{n^2}$ augmente, en tendant vers zéro, lorsque n croît).

Par suite pour n = 3 (valeur minimale de n pour la série de Balmer), $\dfrac{1}{\lambda}$ est minimum et λ est maximum, égal à λ_M tel que :

$$\frac{1}{\lambda_M} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) \text{ d'où } \lambda_M = 6{,}57 \cdot 10^{-7} \text{ m}.$$

Lorsque n est infiniment grand, $\dfrac{1}{\lambda}$ est maximum, λ est minimum égal à λ_m tel que :

$$\frac{1}{\lambda_m} = R\left(\frac{1}{2^2} - 0\right) \text{ d'où } \lambda_m = 3{,}65 \cdot 10^{-7} \text{ m}.$$

Remarque. Les 4 premières raies de la série de Balmer sont visibles, les autres appartiennent au domaine des ultraviolets.

c) α) • Considérons une transition quelconque (n'oublions pas que toutes les transitions sont permises pour l'atome H) faisant passer l'atome excité du niveau d'énergie E_n au niveau d'énergie $E_p < E_n$: il y a alors émission d'un photon d'énergie :

$$\frac{hc}{\lambda} = E_n - E_p = \frac{-13{,}6 \times 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{n^2} - \frac{(-13{,}6 \times 1{,}6 \cdot 10^{-19})}{p^2}$$

d'où $$\frac{1}{\lambda} = \frac{13{,}6 \times 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{hc}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2}\right) = R\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

β) Réponse : les longueurs d'onde de la série de Lyman (de $p=1$) sont comprises entre $\lambda_{2\to1}=1{,}22\cdot10^{-7}$ m et $\lambda_{\infty\to1}=9{,}12\cdot10^{-8}$ m, elles appartiennent donc au domaine des ultraviolets.

γ) Réponse : les longueurs d'onde de la série de Paschen (de $p=3$) sont comprises entre $\lambda_{4\to3}=1{,}88\cdot10^{-6}$ m et $\lambda_{\infty\to3}=8{,}21\cdot10^{-7}$ m, elles appartiennent donc au domaine des infrarouges.

E 94. *L'atome d'hydrogène est constitué par un proton autour duquel gravite un électron. Chaque niveau énergétique de l'atome est caractérisé par une valeur entière, supérieure ou égale à 1 du nombre quantique principal* n *et par une énergie :*

$$E_n=-\frac{C}{n^2}\ (C=2{,}18\cdot10^{-18}\ J).$$

On donne : constante de Planck $h=6{,}62\cdot10^{-34}$ J·s.

a) *Décrire et expliquer le phénomène observé lorsque l'atome passe du premier niveau excité pour lequel* $n=2$ *au niveau fondamental..*

b) *Calculer les longueurs d'onde dans le vide des radiations électromagnétiques obtenues lors des transitions du niveau excité* $n=4$ *aux niveaux respectifs* $n=3$, $n=2$ *et* $n=1$. *Dire à quel domaine du rayonnement électromagnétique elles appartiennent.*

c) *On soumet des atomes d'hydrogène à un bombardement d'électrons émis avec une vitesse négligeable par un filament* F *incandescent. Ces électrons sont accélérés par un champ électrique produit en maintenant une différence de potentiel* U_{GF} *entre une grille métallique* G *et le filament* F.

α) *Quelle est la valeur de l'énergie d'ionisation d'un atome d'hydrogène?*

β) *Calculer la valeur minimale de* U_{GF} *nécessaire pour que les électrons qui franchissent la grille soient capables d'ioniser les atomes d'hydrogène.*

(D'après bac)

96 Comment exciter un atome?

• Pour faire passer l'énergie d'un atome du niveau E_p au niveau $E_n>E_p$, il faut fournir à l'atome l'énergie E_n-E_p :
— cette énergie peut être apportée par un photon absorbé par l'atome et qui abandonne **toute** son énergie, il faut donc que le photon ait juste l'énergie $h\nu=\frac{hc}{\lambda}=E_n-E_p$ pour être absorbé;

— cette énergie peut être apportée par un électron qui abandonne une partie de son énergie cinétique (ou toute son énergie cinétique à la limite).

• Lorsque l'énoncé ne le précise pas, les atomes sont considérés initialement à leur état fondamental d'énergie minimale E_1.

• Pour arracher un électron à un atome, initialement à l'état fondamental, il faut au minimum lui fournir l'**énergie d'ionisation** $\mathbf{E_i=E_\infty-E_1}$. Cette énergie peut être apportée par un photon d'énergie $h\nu\geqslant E_i$ ou par un électron d'énergie cinétique $E_C\geqslant E_i$.

S 94. *a)* • Si l'atome est initialement au niveau 2 c'est qu'il est dans un état excité instable. En subissant la transition décroissante $2 \longrightarrow 1$ l'atome retourne vers son état fondamental d'énergie E_1 en émettant un photon d'énergie :

$$\frac{hc}{\lambda_{2\to 1}} = E_2 - E_1.$$

La longueur d'onde du rayonnement électromagnétique associé au photon est :

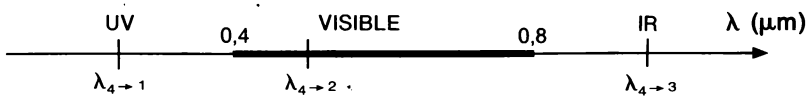
$$\lambda_{2\to 1} = \frac{hc}{E_2 - E_1} = \frac{hc}{-\frac{C}{2^2} + \frac{C}{1^2}} = 1{,}21 \cdot 10^{-7} \text{ m}.$$

b) Réponses :

$$\lambda_{4\to 3} = \frac{hc}{-\frac{C}{16} + \frac{C}{9}} = 1{,}87 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 1{,}87 \ \mu\text{m}$$

$$\lambda_{4\to 2} = \frac{hc}{-\frac{C}{16} + \frac{C}{4}} = 4{,}86 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 0{,}486 \ \mu\text{m}$$

$$\lambda_{4\to 1} = \frac{hc}{-\frac{C}{16} + C} = 9{,}72 \cdot 10^{-8} \text{ m} = 0{,}0972 \ \mu\text{m}.$$



c) α) Pour ioniser un atome d'hydrogène supposé initialement à son état fondamental d'énergie $E_1 = -\frac{C}{1^2} = -C$, il faut au minimum l'exciter jusqu'au seuil d'ionisation de nombre n infiniment grand et d'énergie $E_\infty = 0$.
Il faut donc lui fournir au minimum l'énergie d'ionisation $E_i = E_\infty - E_1 = 0 - (-C) = C$, c'est-à-dire $2{,}18 \cdot 10^{-18}$ J ou $\frac{2{,}18 \cdot 10^{-18}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 13{,}6$ eV.

β) • Déterminons l'énergie cinétique des électrons traversant la grille en fonction de la tension accélératrice U_{GF}. Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à un électron entre F et G :

$$E_{c,G} - E_{c,F} = -e(V_F - V_G) = e(V_G - V_F) = eU_{GF}.$$

Comme $E_{c,F} = 0, \quad E_{c,G} = eU_{GF}.$

• Pour que les électrons franchissant G puissent ioniser les atomes H il faut que $E_{c,G} \geqslant E_i = C$.

D'où $eU_{GF} \geqslant C$

$$U_{GF} \geqslant \frac{C}{e} \quad \text{soit} \quad U_{GF} \geqslant 13{,}6 \text{ V}.$$

La valeur minimale de U_{GF} est donc 13,6 V.

E 95. *Les niveaux d'énergie quantifiés de l'atome* H *sont donnés par l'expression* $E_n = \frac{-13,6}{n^2}$ *en* eV.

a) *Quel est alors l'état de référence à énergie nulle?*

b) *On choisit comme état de référence à énergie nulle l'état fondamental. Représenter sur un axe les énergies* E'_n *correspondant à l'état fondamental et aux trois premiers états excités.*

c) *Des électrons, partant à vitesse nulle, sont accélérés par une tension* $U = 12,5$ V. *Ces électrons frappent des atomes d'hydrogène.*

α) *A quelle niveau d'énergie maximal les atomes* H, *supposés initialement à leur état fondamental, peuvent être portés?*

β) *Quelles raies d'émission peut-on observer? (Les caractériser par leurs fréquences.)*

d) *Un rayonnement électromagnétique monochromatique éclaire des atomes d'hydrogène à leur état fondamental. Quelle est la fréquence de ce rayonnement sachant que les atomes d'hydrogène ayant absorbé un photon donnent les mêmes raies d'émission qu'en* c) β)?
Donnée : la constante de Planck $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ J·s.

S 95. *a*) $E_n = 0$ lorsque n est infiniment grand, l'atome est alors au seuil d'ionisation c'est-à-dire juste en train de se transformer en un ion H^+ et un électron isolé.

b) • Sur l'échelle ⓐ ci-contre sont représentés les niveaux d'énergie E, en eV, lorsque l'état de référence est le seuil d'ionisation :

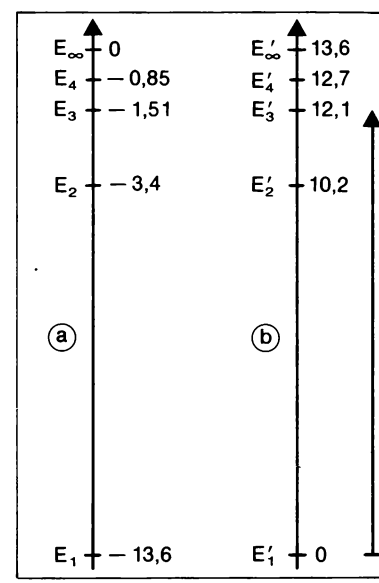
$E_1 = -13,6$;

$E_2 = \frac{-13,6}{2^2} = -3,4$;

$E_3 = \frac{-13,6}{3^2} = -1,51$;

$E_4 = \frac{-13,6}{4^2} = -0,85$ et $E_\infty = 0$.

• Sur l'échelle ⓑ les niveaux d'énergie E′, en eV, sont calculés en prenant l'état fondamental comme état de référence. On passe du niveau E au niveau E′, de même nombre quantique principal n, en ajoutant 13,6. Ainsi, en eV, $E'_1 = 0$; $E'_2 = 10,2$; $E'_3 = 12,1$; $E'_4 = 12,7$; $E'_\infty = 13,6$.



c) α) • Les électrons partant à vitesse nulle, accélérés par une tension $U = 12,5$ V, acquièrent une énergie cinétique E_C telle que $E_c = eU$ (application du théorème de l'énergie cinétique à un électron en remarquant que le travail de la force électrique est positif puisque les électrons sont accélérés).

Par suite :

$$E_C = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \times 12{,}5 \text{ J} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \times 12{,}5}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 12{,}5 \text{ eV}.$$

• Lorsqu'un électron abandonne à un atome d'hydrogène le maximum possible de son énergie cinétique, ce dernier peut « monter » du niveau fondamental $E'_1 = 0$ au niveau d'excitation $E'_3 = 12{,}1$ eV, l'électron après le choc n'aura plus alors que l'énergie cinétique $E'_C = 12{,}5 - 12{,}1 = 0{,}4$ eV.
Cette transition croissante 1 ⟶ 3, correspondant à une absorption quantifiée d'énergie, est représentée sur l'échelle (b) par une flèche orientée vers le haut. (Il est évident que sur l'échelle (a) elle serait représentée par la même flèche.)

β) Les atomes d'hydrogène excités à leur troisième niveau d'énergie sont dans un état instable, très vite ils ont tendance à revenir vers l'état fondamental. On peut donc observer trois transitions décroissantes accompagnées chacune de l'émission d'un photon, donc d'une radiation électromagnétique de fréquence ν :
— transition 3 ⟶ 1, $h\nu_{3\to 1} = E'_3 - E'_1$, d'où $\nu_{3\to 1} = 2{,}92 \cdot 10^{15}$ Hz
— transition 3 ⟶ 2, $h\nu_{3\to 2} = E'_3 - E'_2$, d'où $\nu_{3\to 2} = 4{,}59 \cdot 10^{14}$ Hz
— transition 2 ⟶ 1, $h\nu_{2\to 1} = E'_2 - E'_1$, d'où $\nu_{2\to 1} = 2{,}46 \cdot 10^{15}$ Hz.
(Note, on aurait pu aussi utiliser l'échelle (a).)

d) • Puisque les radiations émises par désexcitation sont les mêmes que ci-dessus, c'est que les atomes d'hydrogène ayant absorbés un photon se trouvent portés à leur troisième niveau d'énergie. Les photons absorbés, cédant toute leur énergie, doivent donc avoir juste l'énergie $E'_3 - E'_1$; la fréquence ν du rayonnement correspondant est donc telle que :

$$h\nu = E'_3 - E'_1 \quad \text{soit} \quad \nu = \frac{E'_3 - E'_1}{h} = \frac{12{,}1 \times 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{6{,}62 \cdot 10^{-34}} = 2{,}92 \cdot 10^{15} \text{ Hz}.$$

• *Remarque.* Cette fréquence ν est égale à la fréquence de la radiation $\nu_{3\to 1}$ émise lors de la transition décroissante 3 ⟶ 1, plus généralement les atomes peuvent absorber les radiations qu'ils sont capables d'émettre.

E 96. *Soit les particules* H, He^+ *et* Li^{2+}.

a) *Que peut-on dire relativement aux électrons contenus dans ces particules? (Les numéros atomiques sont* $Z_1 = 1$, $Z_2 = 2$ *et* $Z_3 = 3$ *respectivement pour les éléments* H, He *et* Li.)

b) *Ces particules excitées ont des niveaux d'énergie de la forme* $E_n = -\dfrac{C}{n^2}$
(*la constante* C *prenant respectivement les valeurs* $C_1 = 13{,}6$ eV, $C_2 = 54{,}4$ eV *et* $C_3 = 122{,}4$ eV *pour* H, He^+ *et* Li^{2+}). *Le nombre entier* n *est supérieur ou égal à* 1.

α) *Que représente* C *pour chaque particule?*

β) *Comment varie* C *en fonction de* Z?

γ) *Quelles sont les radiations de plus grande fréquence que ces particules peuvent émettre?*

Obtient-on des rayons X? $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s.
Données : domaine des ultraviolets $[10^{-8}$ m; $4 \cdot 10^{-7}$ m[
domaine des rayons X $[10^{-11}$ m; 10^{-8} m[.

S 96. *a*) L'atome d'hydrogène ($Z_1 = 1$) électriquement neutre contient 1 électron et un noyau portant la charge $+e$. L'ion He^+ contient 1 électron et un noyau portant la charge $+2e$. L'ion Li^{2+} contient 1 électron et un noyau portant la charge $+3e$. Toutes ces particules ne contiennent donc qu'un électron.

b) α) • A l'état fondamental, l'énergie de chaque particule est minimale : $n = 1$. L'énergie a pour valeur $E_1 = -C$.
Lorsque la particule est excitée au maximum, n est infiniment grand. L'énergie $E_\infty = 0$. Dans cet état l'électron quitte la particule.
L'énergie minimale nécessaire pour extraire l'électron est donc $E_\infty - E_1 = 0 - (-C) = C$.
La constante C s'appelle l'énergie d'ionisation de l'atome H, l'énergie de deuxième ionisation pour l'atome He, l'énergie de troisième ionisation pour l'atome Li.

β) On constate que $\frac{C_1}{Z_1^2} = \frac{C_2}{Z_2^2} = \frac{C_3}{Z_3^2} = 13{,}6$. Cela signifie que pour les particules à un seul électron, l'énergie nécessaire pour extraire cet électron est proportionnelle au carré de la charge électrique portée par le noyau.

γ) • Les radiations de plus grande fréquence sont émises lorsque les particules excitées repassent d'un seul coup de leur état d'excitation maximal $E_\infty = 0$ à leur état fondamental $E_1 = -C$. Au cours de la transition $\infty \longrightarrow 1$, le photon d'énergie $h\nu = E_\infty - E_1 = C$ est émis.

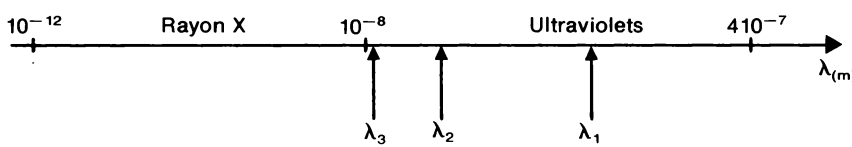
• Pour l'atome H, $\nu_1 = \frac{C_1}{h} = 3{,}29 \cdot 10^{15}$ Hz, donc $\lambda_1 = \frac{c}{\nu_1} = 9{,}12 \cdot 10^{-8}$ m.

Pour l'ion He^+ :

$$\nu_2 = \frac{C_2}{h} = 1{,}31 \cdot 10^{16} \text{ Hz} \quad \text{donc} \quad \lambda_2 = 2{,}28 \cdot 10^{-8} \text{ m}.$$

Pour l'ion Li^{3+} :

$$\nu_3 = \frac{C_3}{h} = 2{,}96 \cdot 10^{16} \text{ Hz} \quad \text{donc} \quad \lambda_3 = 1{,}01 \cdot 10^{-8} \text{ m}.$$



Les radiations λ_1 et λ_2 sont situées dans l'ultraviolet; λ_3 est juste à la frontière un peu arbitraire donnée par l'énoncé, on peut dire que la radiation λ_3 est un rayonnement ultraviolet « dur » ou bien un rayonnement X « mou ».

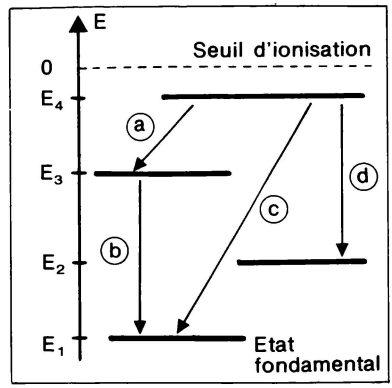
E 97. *Le diagramme énergétique simplifié de l'atome de thallium est schématisé ci-contre.*

a) *Déterminer le niveau d'énergie* E_1 *de l'état fondamental sachant que l'énergie de première ionisation de l'atome de thallium est* 6,08 eV.

b) *Déterminer* E_3 *et* E_4 *sachant que les raies d'émission correspondant aux transitions* ⓒ *et* ⓑ *ont pour longueur d'onde* $\lambda_c = 271$ nm *et* $\lambda_b = 378$ nm. *En déduire* λ_a.

c) • *Les atomes de thallium initialement à l'état fondamental peuvent être excités à leur niveau d'énergie* E_2 *en absorbant des radiations électromagnétiques de longueur d'onde* $\lambda = 1\,170$ nm. *En déduire* E_2 *et* λ_d.

Données :
la constante de Planck $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s;
l'état de référence à énergie nulle est le seuil d'ionisation.



97 Niveaux d'énergie des atomes polyélectroniques.

• Pour expliquer l'émission (ou l'absorption) des radiations par les atomes polyélectroniques, il est nécessaire de raisonner sur l'énergie de l'ensemble de l'atome.

• Lorsque l'atome est à son état fondamental, son énergie E_1 est minimale. Lorsque l'atome est excité, il passe à des niveaux d'énergie E_2, E_3, ... bien déterminés pour un atome donné. Lorsque l'atome est excité au maximum il se transforme en un ion et un électron : c'est le seuil d'ionisation qu'on prend souvent comme état de référence à énergie nulle (alors $E_i = 0 - E_1 = -E_1$ est l'énergie de première ionisation).
Remarquons — qu'il n'y a plus de formule simple permettant de calculer la série des valeurs E_1, E_2, ...;
— que certaines transitions ne sont pas possibles.

S 97. *a*) Pour extraire un électron de l'atome de thallium, l'énergie minimale à fournir est $E_i = E_{\text{seuil d'ionisation}} - E_{\text{état fondamental}} = 0 - E_1$.
Par suite $E_1 = -E_i = -6{,}08$ eV.

b) • Lors de la transition décroissante ⓒ, l'énergie de l'atome passe de E_4 à E_1 : il y a émission d'un photon d'énergie $\dfrac{hc}{\lambda_c} = E_4 - E_1$.

D'où :

$$E_4 - E_1 = \frac{hc}{\lambda_c} = 7{,}33 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 4{,}58\ \text{eV} \quad \text{et} \quad E_4 = E_1 + 4{,}58 = -1{,}50\ \text{eV}.$$

• Lors de la transition décroissante ⓑ, l'énergie de l'atome passe de E_3 à E_1 : il y a émission d'un photon d'énergie $\dfrac{hc}{\lambda_b} = E_3 - E_1$.

D'où :

$$E_3 - E_1 = \frac{hc}{\lambda_b} = 5{,}25 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 3{,}28\ \text{eV} \quad \text{et} \quad E_3 = E_1 + 3{,}28 = -2{,}80\ \text{eV}.$$

• Lors de la transition décroissante ⓐ, l'énergie de l'atome passe de E_4 à E_3 : il y a émission d'un photon d'énergie $\frac{hc}{\lambda_a} = E_4 - E_3$, d'où $\lambda_a = \frac{hc}{E_4 - E_3} = 955$ nm.

c) • Les photons absorbés cèdent toute leur énergie, celle-ci, $\frac{hc}{\lambda}$, doit donc juste être égale à $E_2 - E_1$:

$$E_2 - E_1 = \frac{hc}{\lambda} = 1{,}70 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 1{,}06\ \text{eV} \quad \text{d'où} \quad E_2 = E_1 + 1{,}06 = -5{,}02\ \text{eV}.$$

• Réponse : $\lambda_d = 353$ nm.

POURQUOI ?

Dans ce chapitre on dit que l'atome isolé est stable, or nous savons d'après notre cours de chimie que les atomes H *isolés ont tendance à s'associer pour former du dihydrogène* H_2.

Tout est relatif, un atome H isolé à l'état fondamental est bien plus stable qu'un atome H excité, cela ne veut pas dire que l'atome H isolé a une durée de vie très longue.

Peut-on dire que, lorsqu'un photon d'énergie $h\nu \geqslant E_i$ *frappe un atome, il y a extraction d'un électron un peu comme dans l'effet photoélectronique*?

Les deux phénomènes se ressemblent : l'énergie est apportée par un photon qui cède toute son énergie, cette énergie sert à extraire l'électron et l'excés est communiqué sous forme d'énergie cinétique à l'électron expulsé.
Il y a cependant une différence importante : dans un atome c'est un électron de valence qui est expulsé ce qui nécessite l'énergie d'ionisation E_i; dans le métal c'est un électron libre qui est expulsé ce qui nécessite l'énergie d'extraction W_0, inférieure à E_i pour le même élément.

Peut-on dire que lorsque $n \longrightarrow \infty$, *l'énergie de l'atome* H *devient pratiquement continue?*

Lorsque n devient très grand, la différence entre deux niveaux d'énergie consécutifs devient infiniment petite : on peut dire que l'énergie varie alors pratiquement continûment.
Après le seuil d'ionisation (atteint pour n infiniment grand), l'électron se détache de l'atome, l'énergie du système ion positif et électron séparé peut alors varier continûment, l'électron prenant une énergie cinétique plus ou moins grande.
On constate ainsi que la quantification de l'énergie est due au fait que l'électron est « prisonnier dans une boîte de petites dimensions » : l'atome. Dès que l'électron se libère de cette boîte il n'y a plus quantification de l'énergie.

Qu'appelle-t-on électron de valence, les électrons n'apparaissant pas dans les diagrammes donnant les niveaux d'énergie des atomes?

• En chimie, on considère les atomes dans leur état fondamental. Il est alors possible de déterminer un niveau d'énergie électronique pour *chaque* électron et de classer les électrons ayant des niveaux d'énergie électroniques égaux ou voisins dans une même couche (la couche K comportant au maximum 2 électrons, la couche L 8 électrons, ...)
Les électrons de la couche de plus grand niveau d'énergie électronique sont les électrons de valence.
• Lorsqu'on excite un atome, il n'est pas correct de dire que seul un électron reçoit l'énergie : il faut raisonner sur l'énergie de l'ensemble des électrons par rapport au noyau c'est-à-dire qu'il faut raisonner sur l'énergie de tout l'atome.

Y a-t-il une relation entre l'énergie de première ionisation et les propriétés chimiques?

Les atomes ont deux tendances opposées :
— perdre un électron ce qui nécessite l'apport de l'énergie d'ionisation E_i;
— gagner un électron ce qui dégage l'énergie E_a (appelée énergie d'affinité électronique).
Ainsi bien que H et Cl aient des énergies E_i voisines (13,6 eV et 13 eV), H qui a une faible énergie E_a (0,75 eV) aura-tendance à perdre un électron, alors que Cl qui a l'une des plus grandes énergies E_a (3,6 eV) aura tendance à en gagner un.
L'électronégativité des éléments prend en compte ces deux tendances.

9 LES RÉACTIONS NUCLÉAIRES

E 98. a) *Un noyau d'oxygène contient 8 protons et 8 neutrons. Quelle est sa formule? Quelle est sa charge? Quelle est sa masse approchée en* u *et en* kg?

b) *Un noyau comprend 8 protons et 10 neutrons. Quel est son symbole? Quelle est sa formule? Quelle est sa charge? Quelle est sa masse approchée?*
Donnée : Le nombre d'Avogadro $\mathcal{N} = 6{,}02 \cdot 10^{23}$.

M 98 Description d'un noyau.

• Un noyau qui contient Z protons et $A - Z$ neutrons a pour formule, en désignant par X le symbole de l'élément chimique correspondant :

$$^{A}_{Z}X$$

— le nombre A est le nombre de nucléons;
— le nombre Z est le nombre de charges.

• Les noyaux de même formule forment une classe appelée *nucléïde.*
Les noyaux de même Z, mais de A différents, sont des *isotopes.*

• Pour exprimer la masse d'un noyau on utilise trois unités :
— le kilogramme kg;
— l'unité de masse atomique u : $\mathbf{1\,u = \frac{10^{-3}}{\mathcal{N}}\,kg}$
($\mathcal{N}$: nombre d'Avogadro);
— le MeV/c^2 (voir M 100).

• Pour certains exercices on peut se contenter de l'approximation : la masse d'un noyau est voisine de A u.
Les noyaux ont des rayons de l'ordre de quelques femtomètres ($1\ fm = 10^{-15}$ m).

S 98. *a)* • Le symbole du noyau est celui de l'élément oxygène : O. Le nombre de charge Z est égal au nombre de protons : $Z = 8$. Le nombre de nucléons $A = 8 + 8 = 16$. D'où la formule $^{16}_{8}O$.

• Chaque proton porte la charge électrique $+e$: la charge du noyau est :

$$+Ze = +8 \times 1{,}6 \cdot 10^{-19} = +1{,}28 \cdot 10^{-18}\ C.$$

• La masse approchée du noyau est :

$$A\ u = 16\,u = 16 \times \frac{10^{-3}}{\mathcal{N}}\,kg = 2{,}66 \cdot 10^{-26}\ kg.$$

b) • Ce noyau a le même Z que le noyau précédent : il appartient à l'élément oxygène, son symbole est O. Sa formule est $^{18}_{8}O$: ce noyau est isotope de $^{16}_{8}O$.

• Ce noyau a la même charge que le noyau précédent : $+8e$.

• Sa masse est voisine de 18 u : il est donc plus lourd que le noyau précédent.

E 99. *On suppose que les nucléons (protons ou neutrons) sont des sphères incompressibles de rayon* $r = 1{,}2$ fm.

a) *Quel est le volume d'un noyau comprenant* A *nucléons?*

b) *En supposant ce noyau sphérique de rayon* R, *montrer que* $R = K\sqrt[3]{A}$.

Évaluer K *lorsque* R *s'exprime en* fm. *En déduire le rayon du noyau or* $^{197}_{79}Au$.

c) *En supposant qu'un noyau a une masse voisine de* A u, *montrer que la masse volumique* μ *ne dépend pas de* A. *Évaluer* μ *en* $kg \cdot m^{-3}$, *en déduire la densité des noyaux.*

Données : Le volume d'une sphère de rayon R *est* $\frac{4}{3}\pi R^3$;

$$1\,u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ kg.$$

S 99. *a*) Chaque nucléon a pour volume $v = \frac{4}{3}\pi r^3$, les nucléons étant supposés incompressibles le volume du noyau est $V = A\,\frac{4}{3}\pi r^3$.

b) • Le noyau étant supposé sphérique :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi A r^3 \quad \text{d'où} \quad R^3 = Ar^3 \quad \text{soit} \quad R = r\sqrt[3]{A}.$$

Le coefficient K n'est autre que le rayon r d'un nucléon, $K = 1{,}2$ fm.

• D'après $R = 1{,}2\sqrt[3]{A}$, (R en fm), pour le noyau or de nombre de nucléons $A = 197$, $R = 1{,}2\sqrt[3]{197} = 6{,}98 \simeq 7$ fm.

c) • Le volume du noyau est, nous venons de le voir, $V = \frac{4}{3}\pi A r^3$; sa masse $m = A$ u (en désignant par u la valeur de l'unité de masse atomique exprimée en kg); sa masse volumique μ est donc : $\mu = \frac{m}{V} = \frac{A\ u}{\frac{4}{3}\pi A r^3} = \frac{3u}{4\pi r^3}$: elle est indépendante de A, c'est-à-dire qu'elle est la même pour tous les noyaux (en supposant acceptables les approximations précisées par l'énoncé).

• Numériquement :

$$\mu = \frac{3u}{4\pi r^3} = \frac{3 \times 1{,}66 \cdot 10^{-27}}{4\pi \times (1{,}2 \cdot 10^{-15})^3} = 2{,}3 \cdot 10^{17}\ kg \cdot m^{-3}.$$

• La densité d'un solide ou d'un liquide par rapport à l'eau est $d = \frac{\mu}{\mu_{eau}}$, en désignant par μ_{eau} la masse volumique de l'eau égale à $10^3\ kg \cdot m^{-3}$.

Pour les noyaux $d = \frac{2{,}3 \cdot 10^{17}}{10^3} = 2{,}3 \cdot 10^{14}$. Cette densité est énorme.

E 100. *Un noyau de polonium* $^{210}_{84}Po$ *instable, se transforme en un noyau plomb* $^{206}_{82}Pb$ *et un noyau d'hélium (ou particule* α*)* $^{4}_{2}He$.

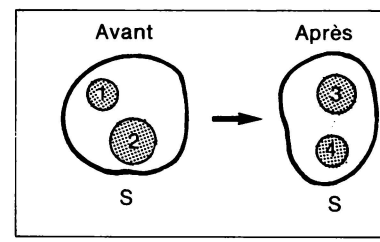
a) *Quelle est la variation de masse du système? Quelle est la variation d'énergie de masse (ou de repos) du système? Est-ce une énergie dégagée ou absorbée?*

b) *On suppose que le noyau* Po *est au repos, que le noyau* Pb *formé est pratiquement au repos, que la particule* α *est lancée à la vitesse* v.
Calculer cette vitesse sachant que le système est isolé (c'est-à-dire que le système n'échange aucune énergie avec l'extérieur).
Données : $m_{Po} = 209{,}936\,9$ u; $m_{Pb} = 205{,}929\,6$ u;
$m_{He} = 4{,}001\,5$ u; 1 u $= 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg.

99 Relation masse-énergie.

• La masse d'une particule indépendante.
Considérons une particule ①, tant que ① ne subit aucune interaction sa masse m_1 reste constante quelle que soit sa vitesse.

• La variation de masse d'un système de particules en interaction.
Considérons une interaction entre la particule ① et une autre particule ② (choc, fusion nucléaire, fission nucléaire, réaction chimique...). Après l'interaction on obtient par exemple deux autres particules ③ et ④.
La masse initiale du système ① et ② séparées est $m_1 + m_2$.
La masse finale du système ③ et ④ séparées est $m_3 + m_4$.
Dans le cas général le système subit une variation de masse $\Delta m = (m_3 + m_4) - (m_1 + m_2)$. Si $\Delta m > 0$ la masse du système augmente, si $\Delta m < 0$ la masse du système diminue.



• La conservation de l'énergie totale d'un système isolé.
Ce qui se conserve dans un système isolé (c'est-à-dire n'échangeant ni masse, ni énergie avec l'extérieur) c'est l'ensemble « masse-énergie », en comptant :
— qu'une particule, à vitesse nulle, de masse m, a une *énergie de repos* ou *énergie de masse* (ou énergie propre) :

$$\mathbf{E_0 = mc^2}$$

— qu'une particule ayant l'énergie cinétique E_C, a une *énergie totale :*

$$\mathbf{E = E_0 + E_C = mc^2 + E_C.}$$

Ainsi la conservation de l'énergie totale se traduit pour notre exemple par :

$$(m_1 c^2 + E_{C,1}) + (m_2 c^2 + E_{C,2}) = (m_3 c^2 + E_{C,3}) + (m_4 c^2 + E_{C,4}).$$

• **La relation d'Einstein.**
On ne s'intéresse parfois qu'à l'énergie dégagée provenant d'une diminution de masse du système (ou qu'à l'énergie absorbée pour provoquer une augmentation de masse du système). On ne tient compte alors que de la variation de l'énergie de repos (ou de masse) du système :

$$\Delta E_0 = \Delta m \cdot c^2.$$

Si $\Delta E_0 > 0$ et $\Delta m > 0$: ΔE_0 s'appelle l'*énergie absorbée*.
Si $\Delta E_0 < 0$ et $\Delta m < 0$: $|\Delta E_0|$ s'appelle l'*énergie dégagée*.

S 100. *a*) • Le système subit une variation de masse :

$$\Delta m = m_{Pb} + m_{He} - m_{Po} = -0{,}005\,8\ u = -9{,}63 \cdot 10^{-30}\ kg.$$

• D'après la relation d'Einstein à cette variation de masse correspond une variation d'énergie de masse (ou de repos) du système :

$$\Delta E_0 = \Delta m \cdot c^2$$
$$= -9{,}63 \cdot 10^{-30} \times (3 \cdot 10^8)^2 = -8{,}67 \cdot 10^{-13}\ J = -5{,}42\ MeV.$$

• Comme la variation d'énergie de repos (ou de masse) ΔE_0 est négative, cela signifie qu'il y a dégagement de l'énergie $|\Delta E_0| = 5{,}42$ MeV.

b) On peut raisonner de deux façons :

— En écrivant que l'énergie totale du système isolé se conserve. Comme les noyaux Po et Pb sont immobiles leurs énergies totales se confondent avec leurs énergies de masse (ou de repos), le noyau He éjecté possède une énergie totale $m_{He}c^2 + E_C$,

d'où $\quad m_{Po}c^2 = m_{Pb}c^2 + (m_{He}c^2 + E_C)$.

Par suite $\quad E_C = (m_{Po} - m_{Pb} - m_{He})c^2 = -\Delta m \cdot c^2$.

Supposons la particule α non relativiste $\left(\text{c'est-à-dire que sa vitesse v est inférieure à } \frac{c}{10}\right)$, alors $E_C = \frac{1}{2} m_{He} v^2$.

On obtient finalement :

$$\frac{1}{2} m_{He} v^2 = -\Delta m \cdot c^2$$

$$v = \sqrt{-2 \frac{\Delta m \cdot c^2}{m_{He}}} = 1{,}62 \cdot 10^7\ m \cdot s^{-1}.$$

$\left(\text{Cette vitesse est bien inférieure à } \frac{c}{10} \text{ comme supposé.}\right)$

— En écrivant que l'énergie dégagée est communiquée à la particule α sous forme d'énergie cinétique. Donc $|\Delta E_0| = -\Delta m \cdot c^2 = E_C = \frac{1}{2} m_{He} v^2$, on retrouve le calcul précédent.

E 101. *(Variations relatives de masse lors d'une réaction nucléaire et lors d'une réaction chimique.)*

a) *Un noyau uranium* $^{238}_{92}U$ *se transforme en un noyau thorium* $^{234}_{90}Th$ *et un noyau hélium* $^{4}_{2}He$ *(ou particule* α*).*
Il se dégage 4,27 MeV *par noyau d'uranium consommé. Quelle est la perte de masse* $|\Delta m|$ *du système? Quelle est la perte relative de masse?*

$$\left(\text{La perte relative de masse d'un système} = \frac{\text{perte de masse}}{\text{masse initiale du système}}.\right)$$

Donnée : $1\ u = 931{,}5\ \dfrac{MeV}{c^2}$.

b) *Le carbone brûle en se transformant en dioxyde de carbone suivant l'équation-bilan* $C + O_2 \longrightarrow CO_2$.
Il se dégage $3{,}92 \cdot 10^5$ J *par mole d'atomes de carbone consommée.*
Quelle est la perte $|\Delta m'|$ *de masse du système* (1 mole C *et* 1 mole O_2)? *Quelle est la perte relative de masse? Conclure.*
Les masses molaires du carbone et de l'oxygène sont respectivement 12 $g \cdot mol^{-1}$ *et* 16 $g \cdot mol^{-1}$.

100 Une nouvelle unité de masse.

- Il est commode pour calculer les énergies de repos de mesurer les masses en **MeV/c²**. Par exemple dire que la masse d'un proton est $m = 938{,}3\ MeV/c^2$ signifie que son énergie au repos $E_0 = mc^2 = 938{,}3$ MeV.
- Dans certains énoncés on donne ainsi $1\ u = 931{,}5\ MeV/c^2$, cela permettra d'en déduire que $1\ uc^2 = 931{,}5$ MeV.

S 101. *a)* L'énergie dégagée est égale à la valeur absolue de la variation de l'énergie de masse du système : $|\Delta E_0| = 4{,}27$ MeV.
D'après la relation d'Einstein, exploitée en valeur absolue, $|\Delta E_0| = |\Delta m|\,c^2$.

D'où $$|\Delta m| = \frac{|\Delta E_0|}{c^2} = 4{,}27\ MeV/c^2.$$

Soit m_U la masse du système « noyau uranium », l'énoncé ne donnant pas la valeur de m_U, on peut dire que $m_U \simeq 238\ u \simeq 238 \times 931;5 \simeq 2{,}22 \cdot 10^5\ MeV/c^2$.
La variation relative de masse est donc $\dfrac{|\Delta m|}{m_U} = \dfrac{4{,}27}{2{,}22 \cdot 10^5} \simeq 1{,}9 \cdot 10^{-5}$.

b) • D'après la relation d'Einstein lorsqu'une mole d'atomes C est consommée avec une mole de molécules O_2, la perte de masse est $|\Delta m'|$ telle que $|\Delta E_0'| = |\Delta m'|\,c^2$, d'où :

$$|\Delta m'| = \frac{|\Delta E_0'|}{c^2} = \frac{3{,}92 \cdot 10^5}{(3 \cdot 10^8)^2} = 4{,}36 \cdot 10^{-12}\ kg.$$

La masse du système (1 mole C et 1 mole O_2) est :

$$m' = 12 + (16 \times 2) = 44\ g = 44 \cdot 10^{-3}\ kg.$$

La perte relative de masse est donc $\frac{|\Delta m'|}{m'} = \frac{4{,}36 \cdot 10^{-12}}{44 \cdot 10^{-3}} = 9{,}9 \cdot 10^{-11}$.

• Conclusion : au cours d'une réaction chimique la variation relative de masse est donc extrêmement faible, indétectable par les instruments de pesée : on peut dire qu'au cours d'une réaction chimique, il y a pratiquement conservation de la masse; au contraire dans une réaction nucléaire la variation de masse, environ un million de fois plus grande, est mesurable.

E 102. *La masse du noyau uranium* $^{235}_{92}U$ *est* $m_U = 235{,}043\,9$ u. *Sachant que la masse d'un neutron isolé est* $m_n = 1{,}008\,665\,2$ u *et que celle d'un proton isolé est* $m_p = 1{,}007\,276\,5$ u, *calculer :*

a) *la valeur absolue de l'énergie de liaison* $|E_\ell|$ *du noyau* $^{235}_{92}U$;

b) *la valeur absolue de l'énergie moyenne par nucléon* $\frac{|E_\ell|}{A}$.

Donnée : 1 u = 931,5 MeV/c².

101 **Énergie de liaison d'un noyau.**

• Considérons un système formé de Z protons isolés de masse m_p et de $(A-Z)$ neutrons isolés de masse m_n : sa masse est $Zm_p + (A-Z)\,m_n$.
Ces particules se lient, le système est finalement un noyau $^A_Z X$ de masse m_X inférieure à la masse du système initial.
Le système subit donc une variation d'énergie de masse (ou de repos) donnée par la relation d'Einstein :

$$\Delta E_0 = [m_X - Zm_p - (A-Z)\,m_n]\,c^2.$$

— Certains professeurs posent que cette variation de masse du système $\Delta E_0 = E_\ell$, E_ℓ nombre négatif désignant l'énergie de liaison.
— D'autres professeurs posent que l'énergie de liaison est égale à l'énergie dégagée, alors $E_\ell = |\Delta E_0|$ est un nombre positif.
— Pour ne pas vous perturber, dans ce livre nous parlerons systématiquement de *la valeur absolue de l'énergie de liaison* du noyau :

$$\mathbf{|E_\ell| = [Zm_p + (A-Z)m_n - m_x]c^2.} \qquad (1)$$

• Par définition, le rapport $\frac{|E_\ell|}{A}$ s'appelle *l'énergie moyenne de liaison par nucléon* dans le noyau considéré : il faut savoir que pour les noyaux les plus stables de $50 < A < 100$, cette énergie de liaison par nucléon est proche de 9 MeV/nucléon.

• La relation (1) peut aussi s'écrire :

$$\mathbf{m_x c^2 = Zm_p c^2 + (A-Z)m_n c^2 - |E_\ell|.} \qquad (2)$$

Cette relation (2) nous montre bien que l'énergie de masse des nucléons liés est inférieure à celle des nucléons isolés. Cette relation est intéressante pour calculer l'énergie dégagée lors d'une réaction nucléaire.

S 102. *a*) La valeur absolue de l'énergie de liaison du noyau $^{235}_{92}U$, se confond avec l'énergie qui se dégagerait si le noyau se formait à partir de 92 protons isolés et $235 - 92 = 143$ neutrons isolés, d'après la relation d'Einstein utilisée en valeur absolue :

$$|E_\ell| = (92\ m_p + 143\ m_n - m_U)\ c^2.$$

Numériquement $|E_\ell| = 1{,}865\ uc^2 = 1{,}865 \times 931{,}5 = 1737$ MeV.

b) La valeur absolue de l'énergie moyenne par nucléon est donc :

$$\frac{|E_\ell|}{A} = \frac{1737}{235} \simeq 7{,}4 \text{ MeV/nucléon.}$$

E 103. *Le noyau* $^{139}_{57}La$ *a pour énergie de liaison par nucléon, en valeur absolue,* 8,17 MeV/nucléon.

a) *Quelle est la masse du noyau* $^{139}_{57}La$ *exprimée en* u *et en* kg?

b) *Quelle est la masse de l'atome* $^{139}_{57}La$?

Données : $1\ u = 931{,}5\ MeV/c^2 = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg.

Masse du proton isolé : $m_p = 1{,}007\,276\,5$ u;

masse du neutron isolé : $m_n = 1{,}008\,665\,2$ u;

masse de l'électron isolé : 0,000 548 6 u.

S 103 *a*) • Évaluons d'abord la valeur absolue de l'énergie de liaison du noyau :

$$|E_\ell| = 139 \times 8{,}17 = 1\,136 \text{ MeV.}$$

• L'énergie de masse du noyau est égale à la somme des énergies de masse des nucléons séparés diminuée de $|E_\ell|$:

$m_{La}\,c^2 = 57\,m_p\,c^2 + (139 - 57)\,m_n\,c^2 - |E_\ell|$ (expression (2) de ℳ 101).

D'où $m_{La} = 57\,m_p + 82\,m_n - \dfrac{|E_\ell|}{c^2}$.

Numériquement $\dfrac{|E_\ell|}{c^2} = 1\,136\ \dfrac{MeV}{c^2} = \dfrac{1\,136}{931{,}5} = 1{,}219$ u; en reportant dans (1) on obtient :

$$m_{La} = 138{,}91\ u = 138{,}91 \times 1{,}66 \cdot 10^{-27} = 2{,}31 \cdot 10^{-25} \text{ kg.}$$

b) L'atome $^{139}_{57}La$ comprend le noyau précédent et 57 électrons liés au noyau.

Soit $|E_{él}|$ l'énergie de liaison de l'ensemble des électrons, $|E_{él}|$ est de l'ordre de quelques dizaines d'électrons-volt.

Rigoureusement, en étendant la relation (2) de ℳ 101 :

$m_{atome}\,c^2 = Zm_p\,c^2 + (A - Z)\,m_n\,c^2 + Zm_e\,c^2 - |E_\ell| - |E_{él}|$

$m_{atome}\,c^2 = m_{noyau}\,c^2 + Zm_e\,c^2 - |E_{él}|$.

L'énergie $|E_{él}|$ est tout à fait négligeable, donc pratiquement la masse de l'atome est la somme de la masse du noyau et de la masse des électrons :

$$m_{atome} = m_{noyau} + 57\ m_e = 138{,}94\ u.$$

E 104. *(Étude d'une réaction de fission nucléaire.)*
De façon simplifiée admettons que dans un réacteur nucléaire se produit la seule réaction de fission traduite par l'équation nucléaire :

$$^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \longrightarrow ^{94}_{38}Sr + ^{140}_{54}Xe + 2^{1}_{0}n.$$

a) *Quelle est l'énergie libérée lorsqu'un noyau uranium est consommé?*

b) *Chaque jour le réacteur consomme* 30 g *d'uranium, quelle puissance moyenne fournit-il?*
Données : les énergies moyennes de liaison par nucléons, en valeur absolue, sont 7,4 MeV/nucléon *pour* $^{235}_{92}U$; 8,4 MeV/nucléon *pour* $^{94}_{38}Sr$; 8,1 MeV/nucléon *pour* $^{140}_{54}Xe$. — *L'unité de masse atomique* $u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg.

S 104. *a)* • Déterminons d'abord les énergies de liaison des noyaux, en valeur absolue :

$$|E_{\ell,\,U}| = 7{,}4 \times 235 = 1739 \text{ MeV}$$
$$|E_{\ell,\,Sr}| = 8{,}4 \times 94 = 790 \text{ MeV}$$
$$|E_{\ell,\,Xe}| = 8{,}1 \times 140 = 1134 \text{ MeV}.$$

• L'énergie de masse du système initial est :

$$E_i = m_U c^2 + m_n c^2.$$

Comme $$m_U c^2 = 92\, m_p c^2 + 143\, m_n c^2 - |E_{\ell,\,U}|$$

(revoir expression 2 de ℳ 101), il s'ensuit :

$$E_i = 92\, m_p c^2 + 144\, m_n c^2 - |E_{\ell,\,U}|.$$

• L'énergie de masse du système final est :

$$E_f = m_{Sr} c^2 + m_{Xe} c^2 + 2\, m_n c^2.$$

Comme $$m_{Sr} c^2 = 38\, m_p c^2 + 56\, m_n c^2 - |E_{\ell,\,Sr}|$$

et $$m_{Xe} c^2 = 54\, m_p c^2 + 86\, m_n c^2 - |E_{\ell,\,Xe}|$$

il s'ensuit $$E_f = 92\, m_p c^2 + 144\, m_n c^2 - |E_{\ell,\,Sr}| - |E_{\ell,\,Xe}|.$$

L'énergie libérée par la consommation d'un noyau uranium est :

$$|E_f - E_i| = E_i - E_f = -|E_{\ell,\,U}| + |E_{\ell,\,Sr}| + |E_{\ell,\,Xe}| = 185 \text{ MeV} = 2{,}96 \cdot 10^{-11} \text{ J}.$$

b) • L'énoncé ne donnant pas la masse de $^{235}_{92}U$, prenons pour m_U la valeur approchée $m_U = 235$ u.

Il disparaît chaque jour $N_U = \dfrac{30 \cdot 10^{-3}}{235 \times 1{,}66 \cdot 10^{-27}} = 7{,}69 \cdot 10^{22}$ noyaux uranium.

L'énergie W libérée chaque jour est $W = N_U \times 2{,}96 \cdot 10^{-11} = 2{,}28 \cdot 10^{12}$ J.
La puissance moyenne du réacteur est :

$$\mathcal{P} = \frac{W}{t} = \frac{2{,}28 \cdot 10^{12}}{24 \times 3600} = 2{,}64 \cdot 10^{7} \text{ W} = 26{,}4 \text{ MW}.$$

E 105. *Parmi les nombreuses possibilités qu'a un noyau* $^{235}_{92}U$ *de se fractionner lorsqu'il est frappé par un neutron, on relève la réaction nucléaire :*

$$^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \longrightarrow ^{139}_{57}La + ^{95}_{42}M_0 + x\,^{1}_{0}n + y\,^{0}_{-1}e.$$

a) *Déterminer* x *et* y.

b) *Déterminer l'énergie ainsi dégagée par la consommation d'un noyau uranium, on l'exprimera en* MeV *et en* J.
Données : — Les masses des diverses particules sont :

$m_U = 235{,}043\,9$ u $\qquad m_{Mo} = 94{,}888$ u
$m_n = 1{,}008\,665\,2$ u $\qquad m_e = 0{,}000\,548\,6$ u.
$m_{La} = 138{,}969$ u

— *L'unité de masse atomique* $u = 931{,}5$ MeV/c^2.

102 Les lois de conservation dans une réaction nucléaire.

• Toutes les réactions nucléaires obéissent à des lois de conservation :
① conservation du nombre de nucléons;
② conservation de la charge électrique;
③ conservation de l'énergie totale (revoir 99);
④ conservation de la quantité de mouvement.
• Pour résumer une réaction nucléaire, on écrit une équation nucléaire qui doit respecter les lois ① et ②.

Ainsi $\quad {}^{A1}_{Z1}X_1 + 2\,{}^{A2}_{Z2}X_2 \longrightarrow 2\,{}^{A3}_{Z3}X_3 + {}^{A4}_{Z4}X_4$

nécessite que $\quad A_1 + 2A_2 = 2A_3 + A_4 \quad$ (loi ①)
$\qquad\qquad\quad Z_1 + 2Z_2 = 2Z_3 + Z_4 \quad$ (loi ②).

• On convient d'étendre la formule ${}^{A}_{Z}X$ à des particules autres que des noyaux :
— pour un électron la formule est ${}^{0}_{-1}e$;
— pour un positron la formule est ${}^{0}_{+1}e$;
— pour un neutron la formule est ${}^{1}_{0}n$.

S 105. *a*) Cette équation nucléaire doit satisfaire :
— la loi de conservation des nucléons, donc $235 + 1 = 139 + 95 + x + 0$, d'où $x = 2$;
— la loi de conservation de la charge électrique, donc $92 + 0 = 57 + 42 + 0 - y$, d'où $y = 7$.

b) • L'énergie libérée est égale à la valeur absolue de la variation d'énergie de masse $|\Delta E_0|$. D'après la relation d'Einstein $|\Delta E_0| = |\Delta m|\ c^2$.

$$|\Delta m| = m_U + m_n - m_{La} - m_{Mo} - 2\,m_n - 7\,m_e = m_U - m_{La} - m_{Mo} - m_n - 7\,m_e$$
$$= 0{,}174\,4 \text{ u.}$$

D'où : $|\Delta E_0| = 0{,}174\,4$ u $\cdot c^2 = 0{,}174\,4 \times 931{,}5 = 162$ MeV $= 2{,}6 \cdot 10^{-11}$ J.

E 106. *(Réaction de fusion nucléaire.)*
La réaction de fusion la plus étudiée actuellement a pour équation nucléaire :

$$ {}^{2}_{1}H + {}^{A}_{2}H \longrightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{1}_{0}n.$$

a) *Déterminer* A *et* Z. (*Proposer deux méthodes pour déterminer* Z.)

b) *Données :*

d *désignant le noyau deutérium* ${}_1^2H$, $m_d = 2{,}014\,0$ u;
t *désignant le noyau tritium* ${}_2^3H$, $m_t = 3{,}015\,1$ u;
α *désignant le noyau hélium* ${}_2^4He$, $m_\alpha = 4{,}001\,5$ u;
p *désignant le proton isolé* ${}_1^1p$, $m_p = 1{,}007\,28$ u;
n *désignant le neutron isolé* ${}_0^1n$, $m_n = 1{,}008\,66$ u;
$1\ u \cdot c^2 = 931{,}5$ MeV.

α) *Déterminer les énergies de liaison par nucléons des particules* d, t *et* α. *Ces énergies seront évaluées en valeur absolue et seront notées* $\mathcal{E}_d$, $\mathcal{E}_t$ et $\mathcal{E}_\alpha$.

β) *Déterminer l'énergie dégagée lors de la fusion d'un noyau* d *et d'un noyau* t *d'une part à l'aide des masses indiquées, d'autre part à l'aide des énergies de liaison par nucléon.*

γ) *En déduire l'énergie libérée lorsqu'il se forme ainsi,* 1 l *de gaz hélium ramené dans les conditions normales de température et pression.*
Le nombre d'Avogadro $\mathcal{N} = 6{,}02 \cdot 10^{23}$.
Combien faudrait-il faire brûler de charbon pour obtenir la même énergie? En brûlant 1 kg *de charbon libère* $3 \cdot 10^7$ J.

S 106. *a*) • D'après la loi de conservation des nucléons : $2 + A = 4 + 1$ d'où $A = 3$.

• Pour évaluer Z on peut :
— écrire la loi de conservation de la charge $1 + Z = 2 + 0$, d'où $Z = 1$;
— dire que le noyau ${}_Z^AH$ ayant le symbole de l'élément hydrogène, son nombre de charge est 1.

b) α) Réponses :

$$\mathcal{E}_d = \frac{|E_\ell|}{A} = \frac{(m_p + m_n - m_d)c^2}{2} = 0{,}90 \text{ MeV/nucléon}$$

$$\mathcal{E}_t = \frac{|E_\ell|}{A} = \frac{(m_p + 2m_n - m_t)c^2}{3} = 2{,}95 \text{ MeV/nucléon}$$

$$\mathcal{E}_\alpha = \frac{|E_\ell|}{A} = \frac{(2m_p + 2m_n - m_\alpha)c^2}{4} = 7{,}07 \text{ MeV/nucléon.}$$

β) — *Première méthode :* d'après la relation d'Einstein, l'énergie libérée est $|\Delta E_0| = |\Delta m|\,c^2 = (m_d + m_t - m_\alpha - m_n)c^2 = 17{,}6$ MeV.

— *Deuxième méthode.*

• L'énergie de masse du système initial $E_i = m_d c^2 + m_t c^2$.
Comme $m_d c^2 = m_p c^2 + m_n c^2 - 2\mathcal{E}_d$ (revoir $\mathcal{M}$ 101, relation (2))
$m_t c^2 = m_p c^2 + 2m_n c^2 - 3\mathcal{E}_t$
il en découle $E_i = 2m_p c^2 + 3m_n c^2 - 2\mathcal{E}_d - 3\mathcal{E}_t$.

• L'énergie de masse du système final $E_f = m_\alpha c^2 + m_n c^2$.
Comme $m_\alpha c^2 = 2m_p c^2 + 2m_n c^2 - 4\mathcal{E}_\alpha$, il s'ensuit que :

$$E_f = 2m_p c^2 + 3m_n c^2 - 4\mathcal{E}_\alpha.$$

• L'énergie libérée est :

$$|E_f - E_i| = E_i - E_f = -2\mathcal{E}_d - 3\mathcal{E}_t + 4\mathcal{E}_\alpha$$
$$= -2 \times 0{,}90 - 3 \times 2{,}95 + 4 \times 7{,}07 = 17{,}6 \text{ MeV.}$$

γ) • Une particule α en captant deux électrons donne naissance à un atome d'hélium constituant une molécule monoatomique He.
Dans v = 1 l de gaz hélium, il y a la quantité de matière de molécules He :

$$n_{He} = \frac{v}{V_M} = \frac{1}{22{,}4} = 4{,}464 \cdot 10^{-2} \text{ mol.}$$

Comme 1 mole de molécules He contient $\mathcal{N}$ molécules He, il s'est donc formé $N_{He} = n_{He} \times \mathcal{N} = 2{,}687 \cdot 10^{22}$ molécules He, donc le même nombre de particules α.

• A chaque fois qu'il se forme une particule α, il se dégage l'énergie $|\Delta E_0| = 17{,}6$ MeV, par suite lorsqu'il se forme 1 l de gaz He, l'énergie dégagée est :

$$N_{He} \cdot |\Delta E_0| = 2{,}687 \cdot 10^{22} \times 17{,}6 = 4{,}73 \cdot 10^{23} \text{ MeV} = 7{,}57 \cdot 10^{10} \text{ J.}$$

• Pour obtenir la même énergie il faudrait brûler $\frac{7{,}57 \cdot 10^{10}}{3 \cdot 10^{7}} \simeq 2\,500$ kg de charbon.

103 Les différents types de réaction nucléaire.

• On distingue les réactions nucléaires :
— *provoquées* qui conduisent à l'obtention de noyaux artificiels (ce sont les réactions de transmutation) ou à un dégagement important d'énergie (ce sont les réactions de fission et fusion);
— *spontanées* dues à des noyaux instables dits radioactifs.
• *La fission.* Certains noyaux lourds ($^{235}_{92}U$, $^{239}_{94}Pu$) frappés par un neutron de faible énergie cinétique se fragmentent en deux noyaux moyens et en 2 ou 3 neutrons éventuellement accompagnés d'électrons (voir E 104 et E 105).
• *La fusion.* En confinant des noyaux légers (à très haute température, sous forte pression), ces noyaux peuvent fusionner en donnant essentiellement un noyau plus lourd (voir E 106).

E 107. (*L'émission γ.*) *Des noyaux radon* $^{A}_{Z}Rn$ *se créent par la réaction nucléaire d'équation* $^{226}_{88}Ra \longrightarrow {}^{A}_{Z}Rn + {}^{4}_{2}He$.

a) *Déterminer* A *et* Z.

b) *Certains noyaux radon formés sont à leur état fondamental de niveau d'énergie* E_1 *pris égal à zéro, d'autres sont à leur premier état excité d'énergie* $E_2 = 0{,}2$ MeV, *enfin d'autres sont à leur deuxième état excité d'énergie* $E_3 = 0{,}5$ MeV.

α) *Que peut-on dire de l'énergie d'un noyau?*

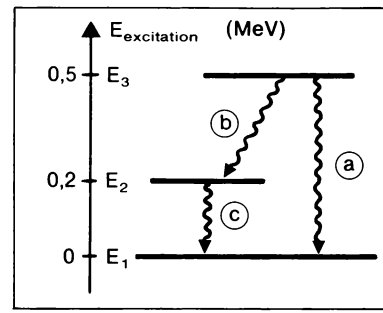
β) *Quelles sont les longueurs d'onde des rayonnements émis par désexcitation des noyaux* Rn? *A quel domaine d'ondes électromagnétiques appartiennent-ils?*
Données : — *toutes les transitions sont permises;*
— *constante de Planck* $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s
— *domaine des rayons γ* $[10^{-14}$ m; 10^{-11} m$[$
— *domaine des rayons X* $[10^{-11}$ m; 10^{-8} m$[$.

S 107. *a*) D'après la conservation du nombre de nucléons A = 222, d'après la conservation de la charge Z = 86.

b) α) L'énergie du noyau est quantifiée comme celle des atomes. Les différences entre niveaux d'énergie nucléaires s'expriment en MeV, alors que les différences entre niveaux d'énergie atomiques s'expriment en eV.

β) • Dans la transition ⓐ décroissante 3 ⟶ 1, il y a émission d'un photon d'énergie $\frac{hc}{\lambda_a} = E_3 - E_1$. La longueur d'onde du rayonnement est donc

$$\lambda_a = \frac{hc}{E_3 - E_1} = 2{,}48 \cdot 10^{-12} \text{ m}.$$



• De même dans la transition ⓑ :

$$\lambda_b = \frac{hc}{E_3 - E_2} = 4{,}14 \cdot 10^{-12} \text{ m};$$

dans la transition ⓒ :

$$\lambda_c = \frac{hc}{E_2 - E_1} = 6{,}21 \cdot 10^{-12} \text{ m}.$$

• Ces trois radiations sont des rayons γ.

E 108. (*Étude simplifiée d'une émission* α.)
Le noyau $^{238}_{94}Pu$ *est émetteur* α. *On obtient en plus de la particule* $\alpha = {}^4_2He$ *un noyau* $^A_Z X$.

a) *Déterminer la formule du noyau.*
On donne un extrait du tableau de classification périodique des éléments :

$_{90}Th$	$_{91}Pa$	$_{92}U$	$_{93}Np$	$_{94}Pu$	$_{95}Am$	$_{96}Cm$	$_{97}Bk$	$_{98}Cf$

b) *Les masses des noyaux* Pu, X *et* He *sont* $m_{Pu} = 237{,}998\,0$ u, $m_X = 233{,}990$ u *et* $m_{He} = 4{,}001\,5$ u.

Quelle est, en J, *l'énergie libérée au cours de cette émission* α? $1\text{ u} = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg.

c) *Dans la classification périodique, comment passe-t-on du noyau père* Pu *au noyau fils* X?

d) *Dans le diagramme* N *(nombre de neutrons) en fonction de* Z, *comment passe-t-on du noyau père au noyau fils?*

e) *Le noyau père et le noyau fils sont pratiquement immobiles, le noyau fils est formé sans être excité (c'est-à-dire à son état fondamental), à quelle vitesse part la particule* α?

S 108. *a*) (Il faut connaître la formule d'une particule α qui est un noyau d'hélium, ^4_2He, dans les futurs énoncés nous ne la donnerons plus. Les principales propriétés de cette radioactivité seront regroupées dans ℳ 104.)
Au cours de la réaction nucléaire d'équation :

$$^{238}_{94}Pu \longrightarrow {}^4_2He + {}^A_Z X$$

il y a conservation du nombre de nucléons, donc A = 234; il y a conservation du nombre de charges donc Z = 92.

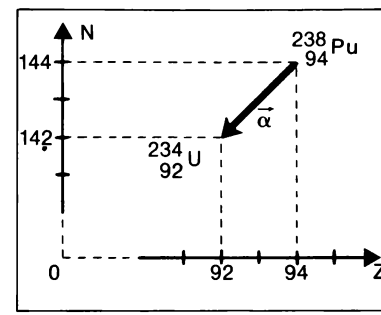
D'après l'extrait du tableau de classification, l'élément de $Z = 92$ est l'uranium de symbole U.
Par suite la formule du noyau fils est $^{234}_{92}U$.

b) • D'après la relation d'Einstein, l'énergie dégagée au cours de l'émission α est :

$$|\Delta E_0| = |\Delta m| \cdot c^2 = (m_{Pu} - m_{He} - m_U)\, c^2 = 0{,}006\,5\ u \cdot c^2$$
$$= 0{,}006\,5 \times 1{,}66 \cdot 10^{-27} \times (3 \cdot 10^8)^2$$
$$= 9{,}71 \cdot 10^{-13}\ J.$$

c) Le noyau fils $^{234}_{92}U$ est placé deux cases avant le noyau père, émetteur α, dans la classification périodique.

d) Dans le diagramme (Z; N) on passe du point représentant le noyau père $^{238}_{94}Pu$ (de $Z = 94$ et $N = 144$), au point représentant le noyau fils $^{234}_{92}U$ (de $Z = 92$ et $N = 142$) par le déplacement $\vec{\alpha}$ de coordonnées $(-2;\ -2)$ puisque Z et N diminuent de 2.
Ce déplacement $\vec{\alpha}$ ramène vers la zone de stabilité (c'est-à-dire la zone comprenant les points correspondants aux noyaux stables).



e) Première façon de raisonner.
L'énergie totale du système (supposé isolé) se conserve.
Avant l'émission α, le système est le noyau Pu immobile, donc l'énergie totale du système se réduit à $m_{Pu}\, c^2$.
Après l'émission α, le système est le noyau U immobile et la particule α lancée à vitesse v $\left(\text{supposée inférieure à } \frac{c}{10}\right)$, donc l'énergie totale du système est $m_U c^2 + \left(m_{He} c^2 + \frac{1}{2} m_{He} v^2\right)$.

Il s'ensuit $$m_{pu} c^2 = m_U c^2 + m_{He} c^2 + \frac{1}{2} m_{He} v^2$$

d'où $$(m_{Pu} - m_U - m_{He})\, c^2 = \frac{1}{2} m_{He} v^2 = |\Delta E_0|. \qquad \text{(revoir le } b\text{)}$$

• Par suite $v = \sqrt{\dfrac{2|\Delta E_0|}{m_{He}}} = \sqrt{\dfrac{2 \times 9{,}71 \cdot 10^{-13}}{4{,}001\,5 \times 1{,}66 \cdot 10^{-27}}} = 1{,}71 \cdot 10^7\ m \cdot s^{-1}$.

$\left(\text{Cette vitesse est bien inférieure à } \frac{c}{10} \text{ comme supposé.}\right)$

Deuxième façon de raisonner.
L'énergie libérée $|\Delta E_0|$ sert uniquement à lancer la particule α :

$$|\Delta E_0| = \frac{1}{2} m_{He} v^2 \qquad \left(\text{en supposant } v < \frac{c}{10}\right)$$

d'où $$v = \sqrt{\frac{2|\Delta E_0|}{m_{He}}} = 1{,}71 \cdot 10^7\ m \cdot s^{-1}.$$

E 109. (*Étude détaillée d'une émission* α *non suivie d'une émission* γ.)
Un noyau $^{226}_{88}$Ra *est émetteur* α. *Par désintégration il donne une particule* α *et un noyau radon* Rn. *La désintégration se fait sans émission de photons* γ.

a) *Écrire l'équation nucléaire. Que peut-on dire du noyau radon formé?*

b) *En traduisant la conservation de la quantité de mouvement du système, évaluer le rapport* $\frac{v_\alpha}{v_{Rn}}$ *et le rapport* $\frac{E_{C,\alpha}}{E_{C,Rn}}$ *après l'émission.*
(Les particules sont supposées non relativistes. Le noyau Ra *est supposé immobile.)*

c) *La perte de masse du système est* $|\Delta m| = 5{,}22 \cdot 10^{-3}$ u.
En traduisant la conservation de l'énergie totale du système, en déduire v_α.
Donnée : $1\ u \cdot c^2 = 931{,}5$ MeV.

S 109. *a)* • L'équation nucléaire doit satisfaire les lois de conservation du nombre de nucléons et de la charge électrique, donc :

$$^{226}_{88}\text{Ra} \longrightarrow {}^{222}_{86}\text{Rn} + {}^{4}_{2}\text{He}.$$

• S'il n'y a pas d'émission γ à la suite de cette émission α, c'est que le noyau fils est formé sans être excité (c'est-à-dire à son état fondamental).

b) • Initialement la quantité de mouvement du système est $\vec{p_i} = m_{Ra}\vec{v_{Ra}} = \vec{0}$ puisque Ra est immobile.
Finalement la quantité de mouvement du système est $\vec{p_f} = m_\alpha \vec{v_\alpha} + m_{Rn}\vec{v_{Rn}}$.
Comme $\vec{p_i} = \vec{p_f} = \vec{0}$, $m_\alpha \vec{v_\alpha} = -m_{Rn}\vec{v_{Rn}}$.
Les deux particules α et Rn partent donc dans la même direction, en sens opposé. En module $m_\alpha v_\alpha = m_{Rn} v_{Rn}$ soit $\frac{v_\alpha}{v_{Rn}} = \frac{m_{Rn}}{m_\alpha}$.
Numériquement $m_{Rn} \simeq 222$ u; $m_\alpha \simeq 4$ u; donc $\frac{v_\alpha}{v_{Rn}} = \frac{222}{4} = 55{,}5$.

• L'énergie cinétique de la particule α est $E_{C,\alpha} = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2$, celle du noyau Rn est $E_{C,Rn} = \frac{1}{2} m_{Rn} v_{Rn}^2$.

$$\frac{E_{C,\alpha}}{E_{C,Rn}} = \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{m_{Rn} v_{Rn}^2} = \frac{\frac{(m_\alpha v_\alpha)^2}{m_\alpha}}{\frac{(m_{Rn} v_{Rn})^2}{m_{Rn}}} = \frac{m_{Rn}}{m_\alpha}$$

puisque $m_\alpha v_\alpha = m_{Rn} v_{Rn}$.
Numériquement $\frac{E_{C,\alpha}}{E_{C,Rn}} = \frac{m_{Rn}}{m_\alpha} = \frac{222}{4} = 55{,}5$.

c) • Initialement l'énergie totale du système est $m_{Ra} c^2$.
• Finalement l'énergie totale du système est $(m_{Rn} c^2 + E_{C,Rn}) + (m_\alpha c^2 + E_{C,\alpha})$.
• L'énergie totale se conservant :

$$m_{Ra} c^2 = m_{Rn} c^2 + E_{C,Rn} + m_\alpha c^2 + E_{C,\alpha}$$

d'où

$$|\Delta m| c^2 = E_{C,Rn} + E_{C,\alpha}. \qquad (1)$$

(On aurait pu aussi dire que l'énergie dégagée se répartissait en énergies cinétiques communiquées à α et Rn.)

• Comme $E_{C,Rn} = \frac{m_\alpha}{m_{Rn}} E_{C,\alpha}$, d'après (1) $|\Delta m| c^2 = E_{C,\alpha}\left(\frac{m_\alpha}{m_{Rn}} + 1\right)$.

D'où $$\frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 = E_{C,\alpha} = \frac{|\Delta m| c^2}{\frac{m_\alpha}{m_{Rn}} + 1}$$

et $$v_\alpha = \sqrt{\frac{2|\Delta m| c^2}{m_\alpha\left(\frac{m_\alpha}{m_{Rn}} + 1\right)}} = \sqrt{\frac{2 \times 5{,}22 \cdot 10^{-3}\,u \times (3 \cdot 10^8)^2}{4\,u\left(\frac{4}{222} + 1\right)}} = 1{,}52 \cdot 10^7\ m \cdot s^{-1}.$$

E 110. (*Étude détaillée d'une émission α suivie d'émission de rayons γ.*)
Les noyaux bismuth $^{212}_{83}Bi$ *se désintègrent en émettant une particule α. On obtient des noyaux thallium* $^{208}_{81}Tl$ *qui, dans 75 cas sur 100, sont dans un état excité.*
Les principaux niveaux d'énergie du noyau thallium sont, en prenant le niveau zéro pour l'état fondamental E_1, $E_2 = 0{,}33$ MeV, $E_3 = 0{,}49$ MeV, $E_4 = 0{,}62$ MeV.

a) *Montrer que* $\frac{E_{C,\alpha}}{E_{C,Tl}} = \frac{m_{Tl}}{m_\alpha}$.

b) *Évaluer la perte de masse observée lors de la réaction :*

$$^{212}_{83}Bi \longrightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{208}_{81}Tl$$

sachant que les particules α émises avec la plus grande vitesse ont une énergie cinétique $E_{C,\alpha_1} = 6{,}08$ MeV.

c) *Montrer qu'on peut obtenir des particules α d'énergies cinétiques différentes.*

d) *Que font ensuite les noyaux excités? Quelle est la longueur d'onde des rayons γ les plus pénétrants que l'on puisse obtenir?*
Données : $1\,u = 931{,}5$ MeV/c^2
$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s.

S 110. *a*) (Voir S 109 *b*).)
b) La particule α_1 est émise avec la plus grande vitesse lorsque le noyau fils Tl est formé à son état fondamental (c'est-à-dire non excité).
Dans ce cas l'énergie libérée par la réaction, $|\Delta m| c^2$, se partage uniquement en énergie cinétique communiquée à la particule α et en énergie cinétique communiquée au noyau Tl qui recule :

$$|\Delta m| c^2 = E_{C,\alpha_1} + E_{C,Tl}.$$

Comme $E_{C,Tl} = \frac{m_\alpha}{m_{Tl}} E_{C,\alpha_1}$, on obtient :

$$|\Delta m| c^2 = E_{C,\alpha_1} + \frac{m_\alpha}{m_{Tl}} E_{C,\alpha_1}$$

$$|\Delta m| c^2 = E_{C,\alpha_1}\left(1 + \frac{m_\alpha}{m_{Tl}}\right)$$

$$|\Delta m| c^2 = 6{,}08\left(1 + \frac{4}{208}\right) \simeq 6{,}2\ \text{MeV}.$$

Par suite $|\Delta m| = 6{,}2\,\frac{\text{MeV}}{c^2} = \frac{6{,}2}{931{,}5} = 6{,}65 \cdot 10^{-3}$ u.

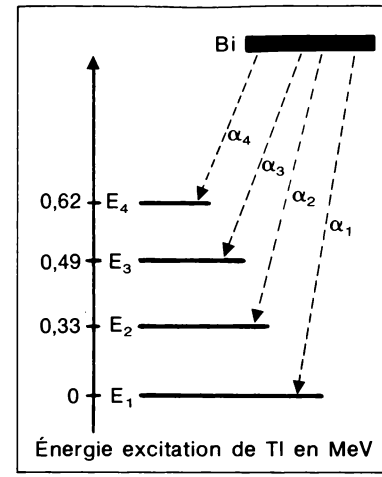
c) • Supposons que le noyau thallium soit dans un état excité, appelons $E_{excitation}$ l'énergie quantifiée absorbée par le noyau thallium.
L'énergie libérée par la réaction sert à lancer la particule α dans un sens, à lancer le noyau Tl dans l'autre sens, à exciter le noyau Tl :

$$|\Delta m|\, c^2 = E_{C,\alpha} + E_{C,Tl} + E_{excitation}.$$

D'où :

$$|\Delta m|\, c^2 = E_{C,\alpha}\left(1+\frac{m_\alpha}{m_{Tl}}\right) + E_{excitation}.$$

— Pour $E_{excitation} = 0$, on retrouve les rayons α_1 d'énergie cinétique maximale $E_{C,\alpha_1} = 6{,}08$ MeV.



— Pour $E_{excitation} = E_2 = 0{,}33$ MeV, on obtient des rayons α_2 d'énergie cinétique $E_{C,\alpha 2}$ telle que :

$$E_{C,\alpha_2} = \frac{|\Delta m|\, c^2 - E_2}{1+\frac{m_\alpha}{m_{Tl}}} = \frac{6{,}2 - 0{,}33}{1+\frac{4}{208}} = 5{,}76 \text{ MeV}.$$

— Pour $E_{excitation} = E_3 = 0{,}49$ MeV, on obtient des rayons α_3 d'énergie cinétique $E_{C,\alpha_3} = 5{,}60$ MeV.

— Pour $E_{excitation} = E_4 = 0{,}62$ MeV, on obtient des rayons α_4 d'énergie cinétique $E_{C,\alpha_4} = 5{,}47$ MeV.

• En résumé, l'énergie d'excitation étant quantifiée, il s'ensuit que l'énergie cinétique des particules α émise est aussi quantifiée.

d) • Les noyaux Tl excités, au bout d'un intervalle de temps variable qui obéit à une loi de probabilité que nous ne développerons pas, perdent leur énergie excédentaire en émettant des photons de grande énergie correspondant à des rayonnements électromagnétiques appartenant au domaine des rayons γ.

• Les rayons γ sont très pénétrants (pour s'en protéger il faut des blindages de grande épaisseur). Ils sont d'autant plus pénétrants que leur longueur d'onde est faible, donc que l'énergie des photons est grande. Par suite c'est lors de la transition $E_4 \longrightarrow E_1$ que sont émis ces photons de plus grande énergie :

$$h\frac{c}{\lambda} = E_4 - E_1.$$

D'où $$\lambda = \frac{hc}{E_4 - E_1} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8}{(0{,}62-0) \times 10^6 \times 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 2 \cdot 10^{-12} \text{ m}.$$

104 Les radioactivités α, β^- et β^+.

• **La radioactivité α.**

Il y a émission d'une particule α ou noyau d'hélium ${}^4_2He$ (éventuellement suivie de l'émission de rayons γ par désexcitation du noyau fils Y) :

$$ {}^A_ZX \longrightarrow {}^4_2He + {}^{A-4}_{Z-2}Y. $$

Au cours de cette désintégration, il se dégage l'énergie $|\Delta E_0| = |\Delta m| c^2$:

— la plus grande partie de cette énergie sert à lancer la particule α qui acquiert l'énergie cinétique $E_{C,\alpha}$;

— une partie sert à lancer le noyau fils Y qui recule avec l'énergie cinétique $E_{C,Y}$;

— enfin il est possible que le noyau fils absorbe une énergie quantifiée $E_{excitation}$;

— par suite :

$$ |\Delta m| c^2 = E_{C,\alpha} + E_{C,Y} + E_{excitation}. $$

Parfois on néglige $E_{C,Y}$. Si on en tient compte, d'après la conservation de la quantité de mouvement on montre que $\frac{E_{C,\alpha}}{E_{C,Y}} = \frac{m_Y}{m_\alpha}$, le noyau X étant toujours supposé initialement immobile.

• **La radioactivité β^-.**

Il y a émission d'électrons de formule ${}^0_{-1}e$ souvent relativistes et de neutrinos ${}^0_0\nu$ (particules de masse nulle, neutres, lancées à la vitesse c, très difficiles à détecter) et éventuellement de rayons γ par désexcitation du noyau fils Y.

$$ {}^A_ZX \longrightarrow {}^0_{-1}e + {}^0_0\nu + {}^A_{Z+1}Y. $$

L'énergie libérée $|\Delta m| c^2 = E_{C,e} + E_{C,Y} + E_\nu + E_{excitation}$.

Remarque. L'électron provient de la transformation d'un neutron en proton :

$$ {}^1_0n \longrightarrow {}^1_1p + {}^0_{-1}e + {}^0_0\nu; $$

on comprend pourquoi les noyaux émetteurs β^- sont des noyaux trop riches en neutrons par rapport aux noyaux stables.

• **La radioactivité β^+.**

Il y a émission de positrons de formule ${}^0_1e$ souvent relativistes, de neutrinos ${}^0_0\nu$ et éventuellement de rayons γ :

$$ {}^A_ZX \longrightarrow {}^0_1e + {}^0_0\nu + {}^A_{Z-1}Y. $$

L'énergie libérée $|\Delta m| c^2 = E_{C,pos} + E_{C,Y} + E_\nu + E_{excitation}$.

Remarque. Le positron libéré provient de la transformation d'un proton en neutron :

$$ {}^1_1p \longrightarrow {}^1_0n + {}^0_1e + {}^0_0\nu; $$

on comprend pourquoi les noyaux émetteurs β^+ sont des noyaux trop pauvres en neutrons par rapport aux noyaux stables.

E111. *Le noyau* $^{60}_{27}Co$ *est radioactif* β^-. *On obtient un noyau* Ni.

a) *Écrire l'équation de la désintégration produite.*

b) *Calculer en* MeV *l'énergie qu'elle libère.*

c) *Le noyau formé est émis pratiquement sans vitesse. Calculer l'énergie cinétique maximale* $E_{C,e}$ *de l'électron émis.*
Expliquer pourquoi les électrons émis lors des désintégrations peuvent avoir une énergie cinétique inférieure à la valeur calculée précédemment.

d) *On observe l'émission de rayons* γ *de longueur d'onde* $\lambda_1 = 9{,}31 \cdot 10^{-13}$ m, $\lambda_2 = 1{,}06 \cdot 10^{-12}$ m *et* $\lambda_3 = 7{,}76 \cdot 10^{-12}$ m.
Quels renseignements peut-on en déduire relativement à l'énergie du noyau Ni.
Données : masse de $^{60}_{27}Co$: $m_{Co} = 59{,}919\,010$ u
masse de $^{60}_{28}Ni$: $m_{Ni} = 59{,}915\,439$ u
masse d'un électron : $m_e = 5{,}486 \cdot 10^{-4}$ u
constante de Planck : $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s
$1\ u = 931{,}5\ MeV/c^2$.

(D'après bac)

S111. *a*) Lors d'une émission β^- se produisent un électron $_{-1}^{0}e$ et un neutrino $^{0}_{0}\nu$, en respectant les lois de conservation du nombre de nucléons et du nombre de charges, l'équation nucléaire s'écrit :

$$^{60}_{27}Co \longrightarrow {}_{-1}^{0}e + {}^{0}_{0}\nu + {}^{60}_{28}Ni.$$

b) • L'énergie dégagée est $|\Delta E_0| = |\Delta m|\, c^2$.
$|\Delta m| = m_{Co} - m_e - m_\nu - m_{Ni} = 0{,}003\,022$ u. (Remarquer que $m_\nu = 0$.)
Par suite $|\Delta E_0| = 0{,}003\,022\ u \cdot c^2 = 0{,}003\,022 \times 931{,}5 = 2{,}815$ MeV.

c) • A priori, $|\Delta m|\, c^2 = E_{C,e} + E_{C,Ni} + E_\nu + E_{excitation}$ en désignant par $E_{C,e}$ l'énergie cinétique de l'électron; $E_{C,Ni}$ l'énergie cinétique de recul de Ni; E_ν l'énergie du neutrino; $E_{excitation}$ l'énergie d'excitation du noyau Ni formé. L'énoncé suppose $E_{C,Ni}$ négligeable.

• $E_{C,e}$ est maximale lorsque $E_\nu = 0$ et lorsque $E_{excitation} = 0$.
Alors $|\Delta m|\, c^2 = E_{C,e}$, donc $E_{C,e} = 2{,}815$ MeV.
(Note : Si on calcule la vitesse de l'électron en supposant que :

$$E_{C,e} = \frac{1}{2} m_e v^2 = 2{,}815 \times 10^6 \times 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ J$$

alors $v = \sqrt{\dfrac{2{,}815 \times 10^6 \times 1{,}6 \cdot 10^{-19} \times 2}{5{,}486 \cdot 10^{-4} \times 1{,}66 \cdot 10^{-27}}} = 9{,}95 \cdot 10^8\ m \cdot s^{-1}$.

On trouve $v > c$!! Cela signifie que la mécanique newtonienne ne convient plus : l'électron est relativiste.)

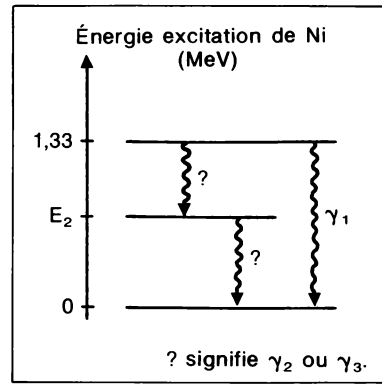
• Comme E_ν n'est pas négligeable dans beaucoup d'émissions; comme $E_{excitation}$ ne l'est pas dans beaucoup d'émissions; il s'ensuit que l'énergie cinétique des électrons est très souvent inférieure à celle évaluée ci-dessus, elle n'est pas quantifiée et peut prendre à priori toutes les valeurs entre la valeur maximale calculée et zéro.

d) Évaluons l'énergie des photons γ_1, γ_2 et γ_3 émis :

$$E_{\gamma_1} = \frac{hc}{\lambda_1} = 2{,}133 \cdot 10^{-13}\ \text{J} = 1{,}33\ \text{MeV}$$

$$E_{\gamma_2} = \frac{hc}{\lambda_2} = 1{,}873 \cdot 10^{-13}\ \text{J} = 1{,}17\ \text{MeV}$$

$$E_{\gamma_3} = \frac{hc}{\lambda_3} = 2{,}559 \cdot 10^{-14}\ \text{J} = 0{,}16\ \text{MeV}.$$



On constate que $E_{\gamma_1} = E_{\gamma_2} + E_{\gamma_3}$. Cela nous suggère que ces photons sont émis lors des transitions représentées ci-contre, ramenant les noyaux Ni excités vers leur état fondamental où le niveau d'excitation est pris égal à zéro.

On peut en déduire que les photons γ_1 proviennent de la transition $E_3 = 1{,}33$ MeV vers $E_1 = 0$.
Il faudrait une étude plus approfondie pour savoir si E_2 correspond à 0,16 MeV ou à 1,17 MeV.

E 112. *Le nucléide* $^{22}_{11}$Na *est radioactif* β^+. *On obtient un noyau néon* Ne.

a) *Écrire l'équation nucléaire traduisant la désintégration.*

b) *Dans le diagramme* (Z; N) *par quelle flèche se représente cette désintégration?*

c) *Calculer l'énergie dégagée par la réaction?*

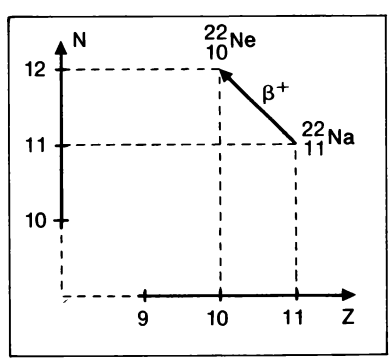
d) *Le positron emporte* 60 % *de l'énergie dégagée, que peut devenir le reste de l'énergie?*

Données : masse de $^{22}_{11}$Na : $m_{Na} = 21{,}9944$ u
masse de $^{22}_{10}$Ne : $m_{Ne} = 21{,}99138$ u
masse du positron : $m_{pos} = 5{,}486 \cdot 10^{-4}$ u
1 u = 931,5 MeV/ c^2.

S 112. *a*) L'émission β^+ consiste en l'émission d'un positron ^0_1e (antiparticule de l'électron) et un neutrino $^0_0\nu$. En respectant les lois de conservation du nombre de nucléons et du nombre de charges, l'équation nucléaire s'écrit :

$$^{22}_{11}\text{Na} \longrightarrow {}^0_1e + {}^0_0\nu + {}^{22}_{10}\text{Ne}.$$

b) Le noyau père Na contient Z = 11 neutrons et N = 11 neutrons, le noyau fils Ne contient Z = 10 protons et N = 12 neutrons : dans le diagramme (N; Z) on passe donc du point représentant $^{22}_{11}$Na au point représentant $^{22}_{10}$Ne, par le déplacement $\overrightarrow{\beta^+}$ de coordonnées (− 1; + 1).



c) En remarquant que la masse du neutrino est nulle, vous trouverez que l'énergie dégagée $|\Delta E_0| = |\Delta m| \cdot c^2 = 2{,}30$ MeV.

d) L'énergie libérée $|\Delta E_0|$ se répartit entre :
— l'énergie cinétique $E_{C,\,pos}$ communiquée au positron,
— l'énergie cinétique de recul $E_{C,\,Ne}$ communiquée au noyau Ne,
— l'énergie communiquée au neutrino,
— l'énergie d'excitation donnée éventuellement au noyau fils Ne (énergie quantifiée qui sera redistribuée dans un deuxième temps sous forme de photons).
Par suite $|\Delta E_0| = E_{C,\,pos} + E_{C,\,Ne} + E_\nu + E_{excitation}$.
Les 40 % de $|\Delta E_0|$ représentent donc $E_{C,\,Ne} + E_\nu + E_{excitation}$.

E 113. *Le noyau* $^{238}_{92}U$, *émetteur* α, *se transforme en* $^{A}_{Z}Th$. *A son tour le noyau* $^{A}_{Z}Th$, *émetteur* β^-, *se transforme en* $^{A}_{Z'}Pa$.
a) *Ecrire les équations nucléaires résumant ces deux passages.*

b) *D'où vient l'électron émis par* Th : *du noyau ou du nuage électronique entourant le noyau?*

c) *L'uranium* $^{238}_{92}U$ *se transforme ainsi par une succession de désintégrations successives* α *et* β^- *en un isotope stable du plomb* $^{206}_{82}Pb$. *Déterminer le nombre de désintégrations de type* α *et celui de type* β^- *nécessaires pour le passage de* $^{238}_{92}U$ *à* $^{206}_{82}Pb$.

S 113. *a*) Réponse : $^{238}_{92}U \longrightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{234}_{90}Th$

$$^{234}_{90}Th \longrightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{0}\nu + {}^{234}_{91}Pa.$$

b) L'électron éjecté lors de la désintégration de $^{234}_{90}Th$ provient du noyau et non pas du nuage électronique entourant ce noyau.
Comme le noyau ne contient que des protons et des neutrons, l'électron provient de la transformation d'un neutron en proton (pour le retrouver facilement : Z augmente de 1), cette transformation se traduit par :

$$^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{1}_{1}p + {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{0}\nu.$$

(Remarque : à chaque fois qu'il se forme un électron ou un positron il se forme aussi un neutrino.)

c) • A chaque désintégration α, il se forme un noyau hélium $^{4}_{2}He$. A chaque désintégration β^-, il se forme un électron $^{0}_{-1}e$ et un neutrino $^{0}_{0}\nu$.
(Remarquons qu'il peut y avoir des désexcitations de noyaux formés conduisant à l'émission de rayons γ, cela ne modifie pas les équations nucléaires.)
Pour passer de $^{238}_{92}U$ à $^{206}_{82}Pb$, soit x le nombre d'émissions α, y le nombre d'émissions β^-. L'équation nucléaire globale s'écrit :

$$^{238}_{92}U \longrightarrow x\,{}^{4}_{2}He + y\,{}^{0}_{-1}e + y\,{}^{0}_{0}\nu + {}^{206}_{82}Pb.$$

D'après la conservation du nombre de nucléons : $238 = 4x + 0 + 0 + 206$, d'où $x = 8$.
D'après la conservation du nombre de charges : $92 = 2x - y + 0 + 82$, comme $x = 8$, on en déduit $y = 6$.

E 114. *Le mendélévium* $^{256}_{101}Md$ *se désintègre en capturant un électron, il se forme un noyau* $^{A}_{Z}X$ *et un neutrino.*

a) *Écrire la réaction de désintégration du mendélévium.*
On donne l'extrait suivant de la classification $_{99}Es$; $_{100}Fm$; $_{101}Md$; $_{102}No$.

b) *La réaction est-elle une émission* α, β^-, β^+, *une fusion, une fission?*

c) *C'est un électron de son propre nuage électronique que* Md *capte. Cette capture électronique provoque une variation du niveau d'énergie de l'ensemble des électrons de l'atome qui passe du niveau* 143 keV *au niveau* 28 keV.
En admettant qu'il n'y a émission que d'un seul type de rayonnement électromagnétique, calculer la longueur d'onde de ce rayonnement. Dans quelle catégorie de radiations électromagnétiques peut-on ranger cette émission?

Données : constante de Planck $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s
domaine des ultraviolets $[10^{-8}$ m; $4 \cdot 10^{-7}$ m[
domaine des rayons X $[10^{-11}$ m; 10^{-8} m[
domaine des rayons γ $[10^{-14}$ m; 10^{-11} m[.

(D'après bac)

S114. *a*) Réponse : ${}^{256}_{101}\mathrm{Md} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e} \longrightarrow {}^{0}_{0}\nu + {}^{256}_{100}\mathrm{Fm}$.

b) Il n'y a pas émission de particule α (${}^{4}_{2}\mathrm{He}$), de plus il est nécessaire qu'il y ait capture d'un électron : ce n'est pas une émission α.
Il n'y a pas émission d'électron (au contraire c'est une capture qui a lieu) : ce n'est pas une émission β^-.
De même il n'y a pas émission de positrons ${}^{0}_{+1}\mathrm{e}$: ce n'est pas une émission β^+.
Ce n'est pas une fusion car à partir de deux noyaux légers on n'obtient pas de noyaux plus lourd.
Enfin ce n'est pas une fission c'est-à-dire la fragmentation, en deux noyaux moyens, d'un noyau lourd heurté par un neutron de faible énergie.
c) Lors de la transition décroissante désexcitant le nuage électronique, il y a émission d'un photon d'énergie :

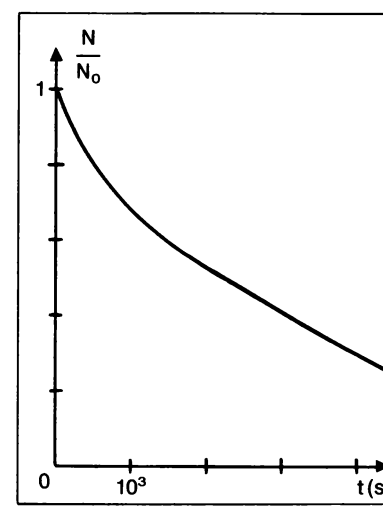
$$\frac{hc}{\lambda} = (143 - 28) \times 10^3 \times 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 1{,}84 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{J}.$$

Donc la longueur d'onde du rayonnement émis est :

$$\lambda = \frac{hc}{1{,}84 \cdot 10^{-14}} = 1{,}08 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}.$$

Le rayonnement est un rayonnement X.

E 115. *Soit un nucléide stable, non radioactif* ${}^{35}_{17}\mathrm{Cl}$. *On soumet un échantillon de ce nucléide à un bombardement de neutrons. On obtient, par capture des neutrons, un nucléide radioactif* ${}^{A'}_{Z'}\mathrm{X}'$. *Des mesures d'activités pratiquées sur ce nucléide radioactif permettent d'obtenir la courbe ci-contre :* N_0 *représente le nombre de noyaux* ${}^{A'}_{Z'}\mathrm{X}'$ *radioactifs à la date* $t = 0$; N *représente le nombre de noyaux* ${}^{A'}_{Z'}\mathrm{X}'$ *à l'instant* t.



a) *Déterminer, à partir de ce graphique, la période radioactive du nucléide obtenu* ${}^{A'}_{Z'}\mathrm{X}'$.

b) *Au bout de combien de temps* $\frac{N}{N_0}$ *sera-t-il égal à* $\frac{1}{16}$?

c) *Identifier le nucléïde* $^{A'}_{Z'}X'$ *qui appartient à la liste suivante :* $^{13}_{7}N$ (594 s); $^{38}_{17}Cl$ (2 240 s); $^{39}_{17}Cl$ (3 300 s); $^{18}_{9}F$ (6 740 s); $^{31}_{14}Si$ (9 430 s).
Entre parenthèse est indiquée la période radioactive du radioélément.

d) *En déduire la réaction nucléaire permettant d'obtenir* $^{A'}_{Z'}X'$.

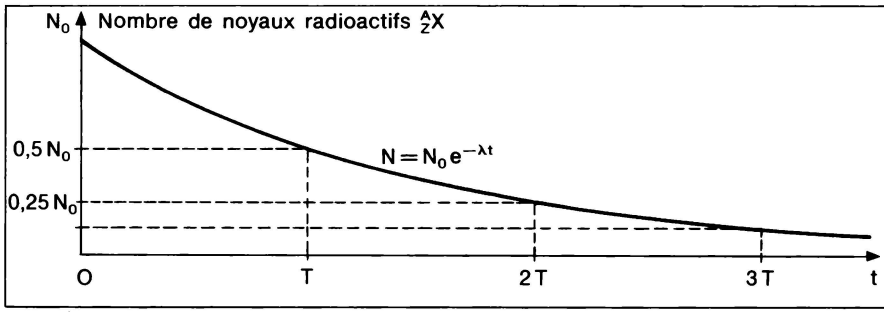
e) *D'après la courbe peut-on savoir le type de radioactivité de* $^{A'}_{Z'}X'$?

(D'après bac)

105 **Période radioactive ou « demi-vie » d'un radionucléide.**

• Considérons un noyau radioactif $^{A}_{Z}X$, il est impossible de prévoir quand il va se désintégrer : sa durée de vie est aléatoire.

• Considérons un échantillon contenant un très grand nombre de noyaux radioactifs $^{A}_{Z}X$: statistiquement tous les intervalles de temps T, appelée période radioactive de $^{A}_{Z}X$, la moitié des noyaux $^{A}_{Z}X$ se désintègre. *On peut dire que chaque noyau* $^{A}_{Z}X$ *a une chance sur deux de se désintégrer en une période radioactive* T.



• Soit N_0 le nombre de noyaux radioactifs $^{A}_{Z}X$ présents à la date $t = 0$ dans l'échantillon étudié.
Soit N le nombre à la date t; $N + dN$, avec $dN < 0$, le nombre à la date $t + dt$.

• L'*activité* de l'échantillon entre t et $t + dt$ est $A = \dfrac{-dN}{dt}$: comme $-dN$ représente le nombre de désintégrations, l'activité représente le nombre de désintégrations par seconde. On la mesure souvent en becquerels : 1 Bq = 1 désintégration par seconde. L'activité A est proportionnelle au nombre N de noyaux $^{A}_{Z}X$ présents à la date t :

$$\mathbf{A = \frac{-dN}{dt} = \lambda N.}$$

La constante positive λ est la constante radioactive de $^{A}_{Z}X$.

• A partir de la relation ci-dessus on montre que (voir E 118) :

$$\mathbf{N = N_0 e^{-\lambda t}} \quad \text{et} \quad \mathbf{T = \frac{Log\ 2}{\lambda}}.$$

(Log ou ln désignant le logarithme népérien.)

S 115. *a*) La période radioactive de ${}^{A'}_{Z'}X'$ est l'intervalle de temps nécessaire pour que le nombre de noyaux radioactifs ${}^{A'}_{Z'}X'$ diminue de moitié.

Graphiquement, on relève que pour $\frac{N}{N_0} = 0{,}5$, t est voisin de 2 250 s : la période radioactive (ou demi-vie) de ${}^{A'}_{Z'}X'$ est voisine de 2 250 s.

b) Ainsi au bout du temps $t = T$, $\frac{N}{N_0} = \frac{1}{2}$; au bout de $t = 2T$, $\frac{N}{N_0} = \frac{1}{4}$; au bout de $t = 3T$, $\frac{N}{N_0} = \frac{1}{8}$; au bout de $t = 4T \simeq 9\,000$ s, $\frac{N}{N_0} = \frac{1}{16}$.

c) Les périodes radioactives des radioéléments proposés sont suffisamment distinctes pour qu'on puisse affirmer que c'est le nucléide ${}^{38}_{17}Cl$ de période 2 240 s que l'on a obtenu.

d) La réaction nucléaire a pour équation :

$$ {}^{35}_{17}Cl + x\,{}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{38}_{17}Cl. $$

D'après la conservation du nombre de nucléons, on en déduit $x = 3$.

e) • Toutes les émissions α, β^-, β^+ obéissent à la même loi de probabilité : un noyau radioactif a une chance sur deux de se désintégrer en une période radioactive T, seule T diffère d'un nucléide radioactif à l'autre.
Il n'est pas possible d'après l'allure de la courbe d'en déduire de quel type de radioactivité il s'agit. Une analyse du rayonnement (à l'aide d'un champ électrique et d'un champ magnétique) est nécessaire pour le savoir.

E 116. *Le candidat peut utiliser les données suivantes :*
$1\ u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg
masse d'un proton : 1,007 28 u
masse d'un neutron : 1,008 66 u
masse d'un noyau ${}^{14}_{6}C$: 14,003 24 u
extrait de la classification périodique : ${}_4Be$; ${}_5B$; ${}_6C$; ${}_7N$; ${}_8O$.

a) *Calculer en* MeV *l'énergie correspondant à une variation de masse* 1 u.

b) *Calculer en* MeV/nucléon *l'énergie de liaison (en valeur absolue) par nucléon du noyau* ${}^{14}_{6}C$.

c) *Le nucléïde* ${}^{14}_{6}C$ *est radioactif* β^-. *Écrire l'équation traduisant la désintégration en indiquant les lois utilisées.*

d) *Dans un laboratoire on a enrichi un échantillon en* ${}^{14}_{6}C$; *cet échantillon contient actuellement* 10^{-6} g *de* ${}^{14}_{6}C$.

α) *Quelle est son activité actuelle sachant que la période radioactive du noyau* ${}^{14}_{6}C$ *est* 5 570 ans *(et que l'échantillon ne contient pas d'autres nucléïdes radioactifs).*

β) *Quelle masse de* ${}^{14}_{6}C$ *contiendra cet échantillon après* $t = 10\,000$ ans.

(D'après bac)

S 116. *a*) $|\Delta E_0| = 1\ u \cdot c^2 = 1{,}66 \cdot 10^{-27} \times (3 \cdot 10^8)^2 = 1{,}494 \cdot 10^{-10}$ J

$$= \frac{1{,}494 \cdot 10^{-10}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \times 10^6} = 933{,}7 \text{ MeV}.$$

b) Réponse (revoir $\mathcal{M}$ 101) $\frac{|E_\ell|}{A} = 7{,}32$ MeV/nucléon.

c) Réponse : ${}^{14}_{6}C \longrightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{0}\nu + {}^{14}_{7}N$.

d) α) • Dans l'échantillon il y a N_0 noyaux ${}^{14}_{6}C$. On peut calculer ce nombre :

$$N_0 = \frac{10^{-9}\ \text{kg}}{14 \times 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}} = 4{,}30 \cdot 10^{16}.$$

Ce nombre est suffisamment grand pour dire que l'activité actuelle A_0 est proportionnelle à N_0, la constante de proportionnalité s'appelant la constante radioactive λ de ${}^{14}_{6}C$:

$$A_0 = \lambda N_0.$$

Comme $T = \frac{\text{Log } 2}{\lambda}$, $\lambda = \frac{\text{Log } 2}{T} = \frac{0{,}693}{5\,570 \times 365 \times 24 \times 3\,600} = 3{,}945 \cdot 10^{-12}\ \text{s}^{-1}$.

Par suite $A_0 = 3{,}945 \cdot 10^{-12} \times 4{,}30 \cdot 10^{16} \simeq 1{,}7 \cdot 10^{5}$ Bq (becquerels, c'est-à-dire désintégrations par seconde).

β) • Selon la loi de décroissance exponentielle $N = N_0 e^{-\lambda t}$. Comme la masse m de carbone 14 est proportionnelle au nombre N de noyaux ${}^{14}_{6}C$ présents : $m = m_0 e^{-\lambda t}$.
• Application numérique : $\lambda t = 3{,}945 \cdot 10^{-12} \times 10^{4} \times 365 \times 24 \times 3\,600 = 1{,}244$.
D'où $m = 10^{-6} \cdot e^{-1{,}244} = 2{,}88 \cdot 10^{-7}$ g.

E 117. *Dans un échantillon de* 1 µg *de* ${}^{210}_{83}Bi$ *qui vient juste d'être préparé, il se produit* $A_0 = 4{,}54 \cdot 10^{9}$ *désintégrations par seconde. Un atome* ${}^{210}Bi$ *a pour masse* 210 u.

a) *Calculer la constante radioactive de ce nucléide.*

b) *En déduire sa période radioactive.*

c) *Au bout de combien de temps ne restera-t-il plus que* 0,01 µg *de* ${}^{210}Bi$?

d) *Au bout de combien de temps l'activité sera-t-elle* 10^{6} Bq?

Donnée : 1 u = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg.

S 117. (Nous ne donnons que quelques indications et les réponses.)

a) $A_0 = \lambda N_{Bi}$, $N_{Bi} = \frac{10^{-9}}{210 \times 1{,}66 \cdot 10^{-27}} = 2{,}87 \cdot 10^{15}$;

$\lambda = \frac{4{,}56 \cdot 10^{9}}{2{,}87 \cdot 10^{15}} = 1{,}59 \cdot 10^{-6}\ \text{s}^{-1}$.

b) $T = \frac{\text{Log } 2}{\lambda} = 4{,}36 \cdot 10^{+5}\ \text{s} \simeq 121\ \text{h}$.

c) $\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t}$ d'où $\text{Log}\frac{N}{N_0} = -\lambda t$ et $t = -\frac{1}{\lambda}\text{Log}\frac{N}{N_0}$.

Numériquement $\frac{N}{N_0} = \frac{m}{m_0} = 0{,}01$, $t = 2{,}90 \cdot 10^{6}\ \text{s} \simeq 33{,}5$ jours.

d) $A = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t}$.

D'où $\frac{A}{A_0} = e^{-\lambda t}$ et $\text{Log}\frac{A}{A_0} = -\lambda t$.

Finalement $t = -\frac{1}{\lambda}\text{Log}\frac{A}{A_0} = 5{,}3 \cdot 10^6$ s $\simeq$ 61 jours.

Remarque : on a supposé dans ce problème que les seuls noyaux radioactifs présents étaient les noyaux ^{210}Bi.

E 118. *Le sodium* 24 *est radioactif* β^-, *sa période est* T = 15 h.
On injecte dans le sang d'un individu 10 cm^3 *d'une solution contenant initialement du sodium* 24 ($^{24}_{11}$Na) *à une concentration molaire volumique de* 10^{-3} *mol* $\cdot$ l^{-1}.

a) *Quel est le nombre de moles de sodium* 24 *introduit dans le sang?*

b) *Quelle est l'activité radioactive de l'individu en becquerels (le nombre d'Avogadro est* $\mathcal{N} = 6{,}02 \cdot 10^{23}$).

c) α) *Établir l'expression donnant en fonction du temps le nombre de noyaux sodium* 24.

β) *En déduire combien il restera de moles de sodium* 24 *au bout de* 6 h.

d) *Au bout de* 6 heures, *on prélève* 10 cm^3 *du sang de cet individu. On trouve que ce prélèvement contient* $1{,}5 \cdot 10^{-8}$ mol *de sodium* 24. *En supposant le sodium* 24 *réparti uniformément et exclusivement dans tout le volume sanguin, calculer ce volume sanguin.*

(D'après bac)

S 118. *a*) La quantité de matière (ou « nombre de moles ») d'atomes $^{24}_{11}$Na est $n_{Na} = CV = 10^{-3} \times 10 \cdot 10^{-3} = 10^{-5}$ mol.

b) L'activité A, mesurée par le nombre de désintégrations par secondes ou becquerels, est proportionnelle au nombre N_{Na} de noyaux radioactifs $^{24}_{11}$Na présents : $A = \lambda N_{Na}$.
Au départ $N_{Na} = n_{Na} \times \mathcal{N} = 10^{-5} \times 6{,}02 \cdot 10^{23} = 6{,}02 \cdot 10^{18}$.

La constante radioactive λ est telle que $T = \frac{\text{Log } 2}{\lambda}$, d'où :

$$\lambda = \frac{\text{Log } 2}{T} = \frac{0{,}693}{15 \times 3\,600} = 1{,}28 \cdot 10^{-5}\ s^{-1}.$$

Par suite l'activité initiale de la source radioactive répartie dans le sang est :

$$A = \lambda N_{Na} = 1{,}28 \cdot 10^{-5} \times 6{,}02 \cdot 10^{18} = 7{,}71 \cdot 10^{13}\ \text{Bq}.$$

c) α) A la date t, désignons par N le nombre de noyaux sodium 24 présents. A cette date l'activité $A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N$.

On peut écrire cette relation $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = -\lambda$ (1).

$\frac{dN}{dt}$ représente la dérivée de N par rapport au temps. Intégrons les deux membres de l'égalité (1) par rapport au temps :

$$\text{Log } N = -\lambda t + C^{te}.$$

Pour évaluer la constante, écrivons que pour $t=0$, $N=N_0$:

$$\text{Log } N_0 = C^{te}.$$

Par suite $\text{Log } N = -\lambda t + \text{Log } N_0$, soit $\text{Log } \frac{N}{N_0} = -\lambda t$.

Cette relation peut aussi s'écrire : $N = N_0 e^{-\lambda t}$ (2).

β) • Divisons les deux membres de la relation (2) par le nombre d'Avogadro : $n = \frac{N}{\mathcal{N}}$, $n_{Na} = 10^{-5}$ mol $= \frac{N_0}{\mathcal{N}}$, d'où $n = n_{Na} e^{-\lambda t}$.

• Pour $t=6$ heures, $n = 7{,}58 \cdot 10^{-6}$ mol.

d) Soit V_S le volume de sang en ℓ, à la date $t=6$ heures la concentration molaire C_S des noyaux radioactifs dans le sang est :

$$C_S = \frac{n}{V_S} = \frac{7{,}58 \cdot 10^{-6}}{V_S} \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}. \qquad (1)$$

Cette concentration est la même dans le prélèvement :

$$C_S = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-8}}{10 \cdot 10^{-3}} = 1{,}5 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}.$$

Reportons dans (1), on en déduit $V_S = \frac{7{,}58 \cdot 10^{-6}}{1{,}5 \cdot 10^{-6}} \simeq 5\,\ell$.

E 120. *(Nucléide de faible période.) Un échantillon de masse* $m=1$ g *est un acier au vanadium contenant des noyaux stables et des noyaux* $^{52}_{23}V$ *émetteurs* β^-. *En émettant un électron, le vanadium* 52 *se transforme en chrome* 52 *stable : la radioactivité de l'alliage n'est donc due au'au vanadium* 52.
A la date $t=0$, *l'acier ne contient pas de chrome, l'activité de l'échantillon, mesurée par le nombre d'électrons émis par seconde, est* $A_0 = 7{,}3 \cdot 10^{17}$ Bq. *A la date* $t=200$ min, *l'activité n'est plus égale qu'à* $A=30$ Bq.

a) *Quelle est la constante radioactive du vanadium* 52? *Quelle est sa période radioactive (ou demi-vie)?*

b) *Quel pourcentage en masse de vanadium* 52 *l'acier contenait-il à la date* $t=0$?

c) *Quels pourcentages en masse de vanadium* 52 *et de chrome* 52 *l'acier contient-il après* $t=200$ min?

Donnée : le nombre d'Avogadro est $6{,}02 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}.

S 120. *a*) Réponses : $\lambda = -\frac{1}{t} \text{Log } \frac{A}{A_0} = 3{,}14 \cdot 10^{-3}$ s^{-1}.

$$T = \frac{\text{Log } 2}{\lambda} = 220 \text{ s}.$$

b) Soit $N_{V,0}$ le nombre de noyaux vanadium 52 à la date $t=0$.

L'activité initiale $A_0 = \lambda N_{V,0}$, d'où $N_{V,0} = \frac{A_0}{\lambda}$.

Il y a autant d'atomes ^{52}V que de noyaux ^{52}V, leur masse est voisine de 52 u soit $\frac{52}{\mathcal{N}}$ g ($\mathcal{N}$: nombre d'Avogadro).

La masse initiale de ^{52}V est $m_{V,0} = N_{V,0} \times \frac{52}{\mathcal{N}} = \frac{A_0}{\lambda} \times \frac{52}{\mathcal{N}}$ en g.

Numériquement $m_{V,0} = 2 \cdot 10^{-2}$ g.

Le pourcentage initial de vanadium en masse est donc : $\frac{m_{V,0}}{m} \times 100 = 2\,\%$.

c) • Soit $m_{V,t}$ la masse de vanadium à la date t où l'activité est A, un calcul analogue conduit à $m_{V,t} = \frac{A}{\lambda} \times \frac{52}{\mathcal{N}} = 8{,}2 \cdot 10^{-19}$ g : pratiquement tout le vanadium 52 a disparu.

• D'après l'équation nucléaire :

$$^{52}_{23}V \longrightarrow {}^{52}_{24}Cr + {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{0}\nu$$

à chaque fois qu'il disparaît un noyau ^{52}V, il apparaît un noyau ^{52}Cr. Comme la masse d'un atome ^{52}V est voisine de celle d'un atome ^{52}Cr, la masse finale de ^{52}Cr est égale à la masse initiale de ^{52}V, soit $2 \cdot 10^{-2}$ g. Le pourcentage final en masse de ^{52}Cr est donc 2 %.

E 121. *(Nucléide de grande période.) Un échantillon contient initialement* N_0 *noyaux radioactifs* X, *émetteurs* β^-. *La période radioactive de* X *est* $T = 2{,}1 \cdot 10^6$ ans.

a) *Évaluer la variation relative* $\frac{N - N_0}{N_0}$ *du nombre de noyaux* X *au cours des dix premières années.*

b) *Lors d'une émission* β^-, X *se transforme en un noyau* Y, *un électron et un neutrino : la masse diminue de* $1{,}5 \cdot 10^{-3}$ u.
A quelle vitesse maximale l'électron peut-il être éjecté?

Données : masse de l'électron : $m = 0{,}51$ MeV/c^2;
1 u = 931,5 MeV/c^2;
on pourra utiliser $e^{\varepsilon} \simeq 1 + \varepsilon$ *si* $|\varepsilon|$ *est un nombre petit devant* 1.

S 121. *a) Première méthode :* d'après la loi de décroissance exponentielle, $N = N_0 e^{-\lambda t}$.

D'où $N - N_0 = N_0(e^{-\lambda t} - 1)$ et $\frac{N - N_0}{N_0} = e^{-\lambda t} - 1$ (1).

$\lambda = \frac{\text{Log } 2}{T} = 3{,}3 \cdot 10^{-7}$ an^{-1}. Pour $t = 10$ ans, $-\lambda t = -3{,}3 \cdot 10^{-6}$ est en valeur absolue très inférieur à 1, par suite $e^{-\lambda t} \simeq 1 - \lambda t$.

En reportant dans (1), il s'ensuit $\frac{N - N_0}{N_0} \simeq -\lambda t = -3.3 \cdot 10^{-6}$: N a très faiblement diminué en valeur relative.

Deuxième méthode. A la date $t = 0$, l'activité initiale $A_0 = \lambda N_0$.
Entre $t = 0$ et $t = \delta t = 10$ ans, N varie de $\delta N < 0$: l'activité moyenne est $A = -\frac{\delta N}{\delta t}$.
Comme δt est très inférieur à la période radioactive T, on peut admettre que cette activité moyenne est pratiquement restée égale à A_0. Par suite :

$$-\frac{\delta N}{\delta t} \simeq \lambda N_0 \quad \text{et} \quad \frac{\delta N}{N_0} \simeq -\lambda \delta t = -3{,}3 \cdot 10^{-6}.$$

b) • $|\Delta m| c^2 = E_{c,e} + E_{c,Y} + E_\nu + E_{excitation}$ (revoir S 111).

• Lors d'une émission β^-, il est possible que $E_\nu = 0$ et $E_{excitation} = 0$ (le noyau fils Y est formé à l'état fondamental). Si on néglige alors l'énergie cinétique de recul $E_{c,Y}$ de Y, l'électron est expulsé avec l'énergie cinétique maximale $E_{c,e} = |\Delta m| \cdot c^2 = 1{,}4$ MeV.

• Comme $\frac{E_{c,e}}{E_0} = \frac{1{,}4}{0{,}51} = 2{,}7$ n'est pas inférieur à 0,01, l'électron est relativiste (revoir ℳ 87).

• A partir de $E_{c,e} = 1{,}4$ MeV, on calculera la vitesse de l'électron relativiste par l'une des deux méthodes proposées dans S 68, on trouvera $v = 2{,}89 \cdot 10^8$ m · s^{-1}.

E 122. *(Équilibre radioactif.)*
On considère 1 g *de radium* 226 *pur fraîchement préparé donc exempt de descendants.*

a) *Calculer l'activité de cet échantillon et montrer que cette activité peut être considérée comme constante pendant une durée faible devant la période radioactive* $T_{Ra} = 1620$ ans *du radium. Donnée :* $1\ u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg.

b) *Le radium* 226 *est émetteur* α : $^{226}_{88}Ra \longrightarrow {}^{222}_{86}Rn + {}^{4}_{2}He$. *Aussitôt formés, les noyaux radon* 222 *se désintègrent à leur tour, avec une période* $T_{Rn} = 3{,}82$ jours.
Après quelques semaines, la masse de radon dans l'échantillon se stabilise : un équilibre radioactif s'est réalisé entre les masses de radium et du radon en présence.

α) *Comparer les activités du radium et du radon en présence lorsque l'équilibre est atteint.*

β) *En déduire la masse de radon en équilibre radioactif dans l'échantillon.*

(D'après bac)

S 122. *a)* • Un atome Ra a une masse voisine de 226 u. L'échantillon contient donc initialement $N^0_{Ra} = \frac{10^{-3}}{226 \times 1{,}66 \cdot 10^{-27}} = 2{,}67 \cdot 10^{21}$ noyaux Ra.

• L'activité initiale du radium est $A^0_{Ra} = \lambda_{Ra} N^0_{Ra} = \frac{\text{Log } 2}{T_{Ra}} N^0_{Ra} = 3{,}62 \cdot 10^{10}$ Bq.

• D'après la loi de décroissance radioactive :

$$N_{Ra} = N^0_{Ra} e^{-\lambda_{Ra} t}$$

Par suite $$A_{Ra} = \lambda_{Ra} N_{Ra} = \lambda_{Ra} N^0_{Ra} e^{-\lambda_{Ra} t} = A^0_{Ra} e^{-\lambda_{Ra} t}.$$

Comme $-\lambda_{Ra} t = -\text{Log } 2 \frac{t}{T_{Ra}}$, si t est très inférieur à T_{Ra}, $-\lambda_{Ra} t$ reste voisin de zéro, $e^{-\lambda_{Ra} t}$ reste voisin de 1, A_{Ra} reste voisin de A^0_{Ra}.

b) α)

$$Ra \xrightarrow{①} R_n \xrightarrow{②} Y$$

— Lorsque la masse de radon se stabilise, cela signifie que le nombre d'atomes Rn formés chaque seconde par ① est égal au nombre d'atomes Rn qui se désintègrent chaque seconde par ②.

— Le nombre d'atomes Rn formés par seconde est égal à l'activité A_{Ra} du radium.

— Quant au nombre d'atomes Rn qui se désintègrent chaque seconde, il est égal à l'activité A_{Rn} du radon.

— Par suite à l'équilibre radioactif : $A_{Ra} = A_{Rn}$ (1).

β) • Au bout de quelques semaines l'équilibre radioactif est atteint, cette durée est suffisamment faible devant T_{Ra} pour qu'on puisse dire que $A_{Ra} \simeq A_{Ra}^0 = \lambda_{Ra} N_{Ra}^0$.

• Soit N_{Rn} le nombre de noyaux Rn présents dans l'échantillon : $A_{Rn} = \lambda_{Rn} N_{Rn}$.

• Par suite d'après (1) :

$$\lambda_{Ra} N_{Ra}^0 = \lambda_{Rn} N_{Rn}$$

$$N_{Rn} = N_{Ra}^0 \frac{\lambda_{Ra}}{\lambda_{Rn}} = N_{Ra}^0 \frac{T_{Rn}}{T_{Ra}}.$$

• Application numérique :

$$N_{Rn} = 2{,}67 \cdot 10^{21} \times \frac{3{,}82}{1\,620 \times 365} = 1{,}72 \cdot 10^{16}.$$

• La masse de radon dans l'échantillon est donc :

$$m_{Rn} = 1{,}72 \cdot 10^{16} \times 222 \times 1{,}66 \cdot 10^{-27} = 6{,}34 \cdot 10^{-9} \text{ kg}.$$

POURQUOI ?

Quand peut-on dire que la masse d'un noyau ${}^{A}_{Z}X$ *est pratiquement* A u?

On peut faire cette approximation dans les problèmes où il n'y a pas de variation de masse à évaluer (c'est-à-dire par d'énergie dégagée à calculer par la formule de Einstein).

• *Dans toutes les émissions radioactives on suppose toujours certaines conditions pas toujours précisées par l'énoncé, lesquelles?*

Quand on traduit la conservation de l'énergie on suppose que le système est isolé, quand on traduit la conservation de la quantité de mouvement on suppose que le noyau qui se désintègre est initialement immobile.

• *Est-ce qu'on peut récupérer toute l'énergie de masse* $E_0 = mc^2$ *en réserve dans un échantillon de matière de masse* m?

Non il ne faut pas croire que l'on peut récupérer toute l'énergie de masse $E_0 = mc^2$ (il n'y aurait dans ce cas plus de problème d'énergie pour l'Homme) :
— si l'échantillon est de l'uranium ${}^{235}U$, fissile, on peut espérer en le bombardant par des neutrons, récupérer à peu près 1 millième de l'énergie de masse;
— si l'échantillon est du charbon, on peut en le brûlant récupérer environ 0,1 milliardième de l'énergie de masse!

• *Quelle est l'énergie de liaison d'un noyau hydrogène* ${}^{1}_{1}H$?

Ce noyau n'est autre qu'un proton, son énergie de liaison est nulle puisque le proton n'est lié à aucun autre nucléon!

• *Mon professeur parle parfois de neutrinos, parfois d'antineutrinos. Pourquoi ne faites-vous pas cette différence?*

L'antineutrino est l'antiparticule du neutrino, sa masse est nulle, sa charge est nulle, il se déplace à la vitesse de la lumière, son nombre de nucléons $A = 0$ ... il a pour nous les mêmes caractéristiques que le neutrino.
Pour les différencier il faudrait faire intervenir un nombre dit nombre leptonique qui se conserve au cours des réactions nucléaires : cela n'est pas à notre programme, aussi les commentaires officiels précisent de confondre neutrino et antineutrino. Il faut bien voir que le neutrino (ou l'antineutrino) est mis dans les équations nucléaires où il accompagne électron et positron, non pas pour satisfaire les lois de conservation des nombres de nucléons et de charges, mais pour satisfaire la conservation de l'énergie (et de la quantité de mouvement). A ce propos rappelons que l'énergie des neutrinos émis n'est pas quantifiée, contrairement à celle des rayons γ émis par désexcitation du noyau. Précisons aussi que la masse du neutrino, mal déterminée, ne serait pas rigoureusement nulle : elle serait de quelques eV/c^2.

10 ASSOCIATION ONDE-PARTICULE

E 123. *Un électron partant sans vitesse initiale est accéléré par une tension* U.

a) *A partir de quelle valeur* U_0 *l'électron devient-il relativiste?*
(*On admet que l'électron devient relativiste si* $E_c \geqslant 0{,}01\,E_0$; *l'électron a pour masse* $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.)

b) *Donner l'expression de la longueur d'onde* λ *associée aux électrons en fonction de* U *pour* $U < U_0$ *et pour* $U \geqslant U_0$. *Calculer* λ *pour* $U = 100$ V; $U = U_0$; $U = 10^5$ V.

c) *On fait arriver sur un cristal de nickel des électrons accélérés par la tension* U_1. *On obtient une figure de diffraction analogue à celle que donnerait des rayons* X *constitués de photons d'énergie* $W = 1{,}25 \cdot 10^{-15}$ J. *Déterminer* U_1.
Constante de Planck : $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s.

106 Onde associée à une particule.

Soit une particule, neutre ou chargée, de quantité de mouvement $\vec{p}$. Pour décrire le comportement ondulatoire de la particule susceptible de donner des phénomènes de diffraction, d'interférences, ... il est intéressant de lui associer une onde dite « onde de matière » ou « onde de De Broglie »,

— de vecteur d'onde tel que :

$$\vec{p} = \frac{h}{2\pi}\vec{k};$$

— de longueur d'onde telle que :

$$\boldsymbol{p = \frac{h}{\lambda}}.$$

S 123. (Rédaction abrégée.)

a) $E_c = eU$; U_0 est tel que $eU_0 = 0{,}01\,mc^2$. D'où $U_0 = 5\,120$ V.

b) — Pour $U < U_0$, l'électron n'est pas relativiste :

$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m}$ d'où $p = \sqrt{2meU}$.

La longueur d'onde associée est $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meU}}$. (1)

— Pour $U \geqslant U_0$, l'électron est relativiste, alors on montre que (revoir « 2e méthode » de S 68 *δ*)) $pc = \sqrt{E_c^2 + 2E_0E_c}$.

La longueur d'onde associée est $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{pc} = \frac{hc}{\sqrt{e^2U^2 + 2mc^2eU}}$. (2)

— Application numérique :
pour $U = 100$ V, d'après (1) : $\lambda = 1{,}23 \cdot 10^{-10}$ m;
pour $U_0 = 5\,120$ V, d'après (2) ou (1) : $\lambda_0 = 1{,}71 \cdot 10^{-11}$ m;
pour $U = 10^5$ V, d'après (2) : $\lambda = 3{,}70 \cdot 10^{-12}$ m.
Ainsi $\lambda \leqslant \lambda_0$ pour les électrons relativistes.

c) • La longueur d'onde λ_X de l'onde électromagnétique correspondant aux rayons X est telle que $W = \frac{hc}{\lambda_X}$ d'où $\lambda_X = \frac{hc}{W} = 1{,}59 \cdot 10^{-10}$ m.

• La longueur d'onde de l'onde De Broglie, λ, associée aux électrons doit être égale à λ_X. Comme $\lambda_X > \lambda_0$, les électrons utilisés ne sont pas relativistes.

D'après (1) : $U_1 = \frac{h^2}{2me\lambda_X^2} = 59{,}5$ V.

• Remarques :
— Cette dernière expérience a été réalisée par Davisson et Germer en 1926.
— L'onde de De Broglie n'est pas une onde électromagnétique.

E 124. *Une onde a la possibilité d'être diffractée lorsqu'elle rencontre un obstacle dont les dimensions sont de l'ordre de grandeur de sa longueur d'onde. Calculer pour chacune des particules suivantes la longueur d'onde associée et proposer éventuellement des obstacles susceptibles de donner avec ces ondes le phénomène de diffraction. Conclure.*

① *Électron non relativiste d'énergie cinétique* 50 eV.

② *Électron ultra-relativiste de* $\gamma = 1960$.

③ *Proton ultra-relativiste de* $\gamma = 25$.

④ *Neutron thermique, non relativiste, d'énergie cinétique* 0,1 eV.

⑤ *Grain de poussière de masse* 1 µg *lancé à* 1 m·s^{-1}.

Données :
— *constante de Planck :* $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s;
— *masse d'un électron :* $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg;
— *masse d'un proton :* $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg;
— *masse d'un neutron :* $1{,}675 \cdot 10^{-27}$ kg.

S 124. (Rédaction très abrégée.)

① $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_c}} = 1{,}73 \cdot 10^{-10}$ m $= 1{,}73$ Å; obstacles pouvant donner la diffraction : molécules, atomes, ions.

② Pour une particule ultra-relativiste $v \simeq c$, par suite $p = \gamma mv \simeq \gamma mc$. La longueur d'onde associée $\lambda = \frac{h}{p} \simeq \frac{h}{\gamma mc} = 1{,}24 \cdot 10^{-15}$ m $= 1{,}24$ fm; obstacles pouvant donner la diffraction : les noyaux des atomes.

③ $\lambda \simeq \frac{h}{\gamma mc} = 5{,}28 \cdot 10^{-17}$ m; pas d'obstacle matériel compatible.

④ $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\,mE_c}} = 9{,}04 \cdot 10^{-11} = 0{,}9$ Å; mêmes obstacles que pour ①.

⑤ $\lambda = \frac{h}{mv} = 6{,}62 \cdot 10^{-28}$ m; pas d'obstacle matériel compatible.

Conclusion : Le phénomène de diffraction (donc le comportement ondulatoire) ne peut pas être observé avec des particules macroscopiques (⑤) ou bien avec des particules microscopiques de trop grande énergie (③).

E 125. *On considère une particule non relativiste évoluant, en gardant une énergie potentielle constante prise égale à zéro, dans un « puits de potentiel à parois verticales » constituant ce qu'on appelle une « boîte à une dimension ». L'énergie mécanique de la particule se confond alors avec son énergie cinétique. On appelle* d *la distance entre les parois.*

a) *Montrer que la particule ainsi piégée a son énergie quantifiée.*

b) *Déterminer le premier niveau d'énergie :*
— d'un électron piégé dans un atome d'hydrogène sous l'effet d'une force électrostatique, cet atome étant de façon simple assimilé à un « puits » de largeur $d = 10^{-10}$ m;
— d'un nucléon piégé dans un noyau par les interactions fortes dues aux nucléons voisins, ce noyau étant assimilé à un « puits » de largeur $d = 4 \cdot 10^{-15}$ m.

Données : masse d'un électron : $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; *masse d'un nucléon :* $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg; *constante de Planck :* $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s.

M 107 **Quantification d'une particule piégée dans « une boîte à une dimension ».**

• Une particule a une énergie potentielle constante. Elle est astreinte à se déplacer sur un segment AB, de longueur d, rencontrant en A et en B des murs de potentiel. On dit que la particule évolue dans « une boîte à une dimension ».

• L'onde de matière associée à la particule est stationnaire et présente des nœuds en A et en B. Sa longueur d'onde est telle que $\mathbf{d = n\frac{\lambda}{2}}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

• Il s'ensuit (voir calcul de S 125) que l'énergie de la particule est quantifiée :

$$\mathbf{E_n = n^2 E_1}$$

(E_1 : énergie du niveau fondamental).

• La quantification apparaîtra nettement uniquement pour les particules microscopiques piégées dans un espace restreint.

S 125. *a)* • L'énergie de la particule $E = E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m}$ (1).

• L'onde stationnaire a une longueur d'onde $\lambda = \frac{h}{p}$ telle que $d = n \frac{\lambda}{2}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Par suite $d = \frac{nh}{2p}$ et $p = \frac{nh}{2d}$.

Reportons dans (1) : $E = \frac{n^2 h^2}{8md^2}$.

Pour une particule et une « boîte » données, E peut prendre une série de valeurs déterminées (E_1; $E_2 = 4E_1$; ... $E_n = n^2 E_1$ ...) : elle est quantifiée.

b) Réponses :
— le premier niveau d'énergie de l'électron dans l'atome est $E_1 = 37{,}6$ eV;
— le premier niveau d'énergie du nucléon dans le noyau est $E_1 = 12{,}8$ MeV;
— ces calculs simples donnent des ordres de grandeur satisfaisants.

E 126. *Une molécule de dioxygène O_2 est piégée au sein d'un échantillon de gaz oxygène.*
On peut considérer que tout se passe comme si la molécule était enfermée dans une boîte à une dimension de largeur $d = 1{,}2$ µm (d *représente la distance moyenne parcourue entre deux chocs consécutifs*). *L'énergie mécanique* E *de la molécule se confond avec son énergie cinétique.*

a) *Montrer que l'énergie* E *est théoriquement quantifiée.*

b) *Entre* t_1 *et* t_2, *la molécule est au niveau d'énergie* $n = 90\,000$. *Quelle est sa vitesse?*

c) *Après* t_2, *la molécule ayant perdu l'énergie* $|\Delta E|$ *est au niveau d'énergie* $n' = 89\,999$. *Évaluer la perte relative* $\frac{|\Delta E|}{E}$. *Conclure.*

Données :
masse d'une molécule O_2 : $m = 5{,}31 \cdot 10^{-26}$ kg;
constante de Planck : $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s.

S 126. *a)* Revoir S 125 *a)* : $E_n = \frac{n^2 h^2}{8md^2}$.

b) L'énergie E se confond avec l'énergie cinétique : $\frac{1}{2} mv^2 = \frac{n^2 h^2}{8md^2}$, d'où $v = \frac{nh}{2md} = 467 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

c) • La perte d'énergie est $|\Delta E| = E_n - E'_n = \frac{h^2}{8md^2} (n^2 - n'^2)$.

La perte d'énergie relative est $\frac{|\Delta E|}{E_n} = \frac{n^2 - n'^2}{n^2} = 1 - \frac{n'^2}{n^2} = 2{,}22 \cdot 10^{-5}$.

• *Conclusion.* En passant d'un système d'ondes stationnaires de matière à un autre, l'énergie quantifiée varie très faiblement en valeur relative. En d'autres termes la transition d'un niveau d'énergie à un niveau immédiatement voisin s'accompagne d'un « saut » d'énergie très peu perceptible : on peut considérer que l'énergie de la molécule peut varier pratiquement de façon continue.

• *Remarque.* Pour un objet macroscopique (balle élastique piégée entre deux murs, ...) on montrerait de même que $\frac{|\Delta E|}{E_n}$, entre deux niveaux voisins, est tout à fait négligeable : l'énergie d'un objet macroscopique varie de façon continue.

L'impression de ce livre
a été réalisée sur les presses
des Imprimeries Aubin
à Poitiers/Ligugé

pour les Éditions Delagrave

Achevé d'imprimer le 15 juin 1984
N° d'édition, 246 — N° d'impression, L 16803
Dépôt légal, juin 1984

Dans cette collection :

- **CHIMIE Terminales C - D - E**
- **PHYSIQUE Terminale D**

I. Mécanique - Electromagnétisme
II. Oscillations - Physique atomique

- **PHYSIQUE Terminales C - E**

I. Mécanique - Electromagnétisme
II. Oscillations - Physique atomique

ISBN 2-206-00246-9